КВАНТ

СЕНТЯБРЬ ОКТЯБРЬ 2002 № 5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Компания Sakhalin Energy («Сахалинская Энергия») выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Березовая волна

А.АБРИКОСОВ (мл.)

Унылая пора! Очей очарованье!
А.С.Пушкин

Все живое тянется к свету?

Осень – заветное время загородных вылазок городского жителя. Выйдя из электрички и процитировав для порядка «из Пушкина», обыватель устремляется к вожделенному лесу, где так легко дышится и приятно думается о сокровенном. Среди деревьев можно наконец-то сбросить с себя заботы. Грибник высматривает последние чернушки, лирик наслаждается многоцветьем и шорохом палой листвы, биолог вспоминает что-то об областях распространения красавицы-березы бородавчатой на территории европейской части России... Стойте! Стоит ли лезть в чужие мысли? Давайте лучше тоже поразмышляем. Тем более что загадок в лесу – непочатый край.

Одна из примет ранней осени – ярко белеющие силуэты берез. Они словно выступают на первый план, и на фоне темного сбросившего листву леса проявляются мельчайшие детали. Может быть, поэтому прошлой осенью, гуляя в лесу, я обратил внимание на одну березу (рис.1). Вроде бы ничего необычного в ней не было: дерево, как дерево, кривое вдобавок. Впрочем, именно это меня и привлекло. Когда-то давным-давно совсем еще молодое деревце почему-то наклонилось. То ли ветер виноват, то ли крот подрыл, а может, медведь спиной потерся. Мало ли что. Важно другое. Почувствовав неладное, береза начала выгибаться навстречу уклону и в конце концов выровнялась, потянулась вверх. Вот тут я и задумался: «Как, собственно говоря, она почувствовала непорядок и поняла, куда надо расти?»

«Эка невидаль!» – скажете вы. – Ясное дело, всякая травка к свету тянется!» Так, да не так. Береза ведь не трава, а дерево. Давайте разбираться.

Рис.1. Почему совсем было полегшие деревья выравниваются?

Действительно, растениям необходим свет, и они разворачиваются к солнцу. Ботаники называют это гелиотропизмом (от греческих слов helios – солнце и tropos – поворот). Ярчайший пример гелиотропизма – подсолнечник, цветы которого неустанно следят за светилом. (Опять загвоздка. Когда к свету повернуты листья, это нужно для фотосинтеза. А цветам-то зачем вертеться? Догадались?)

Спору нет, свет – важнейший жизненный фактор. Во влажном сумраке тропических джунглей лианы взбираются на десятки метров вверх, чтобы там, вырвавшись к солнцу, расправить листья. Вообще, всякое растение стремится в первую очередь к тому, чего не хватает. Например, верблюжья колючка растет в пустыне, где уж чего-чего, а света в избытке, зато в дефиците вода. Поэтому на поверхности торчит крохотный кустик (это позволяет сэкономить на испарении), но корни, наоборот, тянутся глубоко вниз к драгоценной влаге. Этакая лиана наоборот. Тут, видимо, речь идет о гидротропизме. Но это к слову.

Размышления под кривой березой

Вернемся к нашим березам. Глупо было бы отрицать, что листья, непосредственно участвующие в фотосинтезе, следуют за солнцем. Однако ствол куда менее подвижен. Его назначение – нести на себе тяжесть кроны. К тому же листьям-то какая разница, куда наклонился ствол. Едва ли им под силу развернуть такую махину. Естественнее предположить, что какой-то внутренний механизм помогает стволу ориентироваться против силы тяжести. Интересно, как может работать этот встроенный отвес?

Рассмотрим, какие внешние силы действуют на ствол дерева. Пусть сначала дерево стоит вертикально (рис.2,*а*). Тогда сил всего две: сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и равнодействующая сил реакции почвы $\vec{N} = -m\vec{g}$. Сила тяжести приложена к центру масс, расположенному примерно посередине дерева на высоте $h/2$, а сила реакции – к корням дерева. Обе силы действуют вдоль ствола и уравновешивают друг друга. Очевидно, что вертикальный ствол работает только на сжатие.

Коль скоро речь зашла о физике, имеет смысл представить себе порядки входящих в задачу величин. Пусть речь идет о взрослой березе. Тогда центр тяжести находится на высоте $h/2 \sim 10$ м, диаметр ствола $d = 2R \sim 0{,}2$ м, а общая масса дерева, если пренебречь сужением ствола и считать его цилиндрическим, $m \sim \pi R^2 h\rho \approx 2500$ кг. (В последней оценке мы заведомо завысили плотность древесины, приняв $\rho \approx 1000$ кг$/$м^3. Зато мы не учитывали крону.) Без всяких вычислений легко сообразить, что давление на срезе ствола почти такое же, как на глубине h под водой: $p \sim \rho g h \approx 2 \cdot 10^5$ Н$/$м^2 ≈ 2 атм.

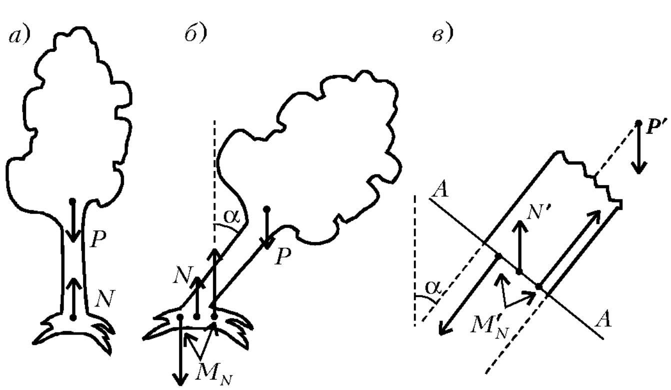


Рис.2. Силы и моменты, действующие на вертикальные и наклонные деревья

После бури

Посмотрим, что изменится, если сильный порыв ветра наклонит дерево (рис.2,*б*). Очевидно, смещение центра масс вызовет появление моментов сил. Разумеется, по величине силы тяжести и реакции почвы не изменятся, однако теперь они будут направлены не по одной линии и неизбежно создадут вращательный момент. Величина момента пары сил равна произведению силы на плечо:

$$M_P = P\frac{h}{2}\sin\alpha\,,$$

где α – угол отклонения дерева от вертикали. Этот момент должен быть уравновешен ответным моментом сил реакции почвы:

$$M_N = -M_P\,,$$

в противном случае дерево будет вывернуто с корнем (как, например, на известной картине И.И.Шишкина «Утро в сосновом лесу»). Таким образом, когда дерево наклонилось, помимо силы реакции почвы на его корни действует момент, удерживающий его в этом положении.

Однако одними лишь внешними моментами дело не обойдется. Отклонение от вертикали приведет к перераспределению напряжений внутри ствола. Напомним, что напряжением называется сила, действующая на мысленно выделенную единичную площадку. Причем в твердом теле кроме сжатий и растяжений могут возникать еще и сдвиговые напряжения, которых не бывает в жидкости.

Чтобы найти напряжения, нам придется написать пару формул. Впрочем, поверив автору на слово, можно сразу переходить к следующему разделу.

Давайте мысленно разрежем дерево по линии $A - A$ и рассмотрим силы, приложенные к верхней части ствола (рис.2,*в*). Дословно повторив все рассуждения, мы придем к выводу, что сумма сил, действующих на срезе, эквивалентна вертикальной силе реакции $\vec{N}'$, уравновешивающей силу тяжести $\vec{P}'$, и моменту пары сил M'_N, удерживающему ствол (штрихами отмечены величины, относящиеся к верхней части ствола), где

$$\vec{P}' = m'\vec{g}\,,$$

$$\vec{N}' = -m'\vec{g}\,,$$

$$M'_N = m'g\frac{h'}{2}\sin\alpha\,.$$

Поскольку срез $A{-}A$ наклонен, сила реакции имеет сдвиговую составляющую $N'_{сд} = m'g\sin\alpha$, а среднее давление, сжимающее ствол, с учетом наклона дерева равно

$$p' = \frac{N'\cos\alpha}{\pi R^2} = \rho g h' \cos\alpha .$$

Оказывается, что напряжения, возникающие в стволе за счет компенсирующих моментов, гораздо больше напряжений, вызванных нормальным сжатием силой тяжести. Как видно из рисунка 2,*в*, чтобы создать момент, верхняя сторона ствола растягивается, а нижняя сжимается. Для грубой оценки попробуем считать, что возникающие при этом усилия равномерно распределены по половинкам сечения. Пусть на верхней половине среза в среднем действует растягивающее давление p'_M, а на нижней – такое же среднее сжимающее давление. Считая, что плечо пары сил по порядку величины равно R, запишем

$$M'_N \sim \frac{1}{2}\pi R^2 p'_M \cdot R .$$

Отсюда ничего не стоит выразить сами напряжения:

$$p'_M \sim \frac{2M'_N}{\pi R^3} = \frac{\rho g (h')^2 \sin\alpha}{R} .$$

Сравнивая со сжатием за счет силы тяжести, мы видим, что

$$p'_M \sim p' \frac{h'}{R} \operatorname{tg}\alpha \sim p' \frac{h}{R} \operatorname{tg}\alpha = 200 p' \operatorname{tg}\alpha .$$

Практически для всех заметных глазу углов ($\alpha > 1^\circ$) напряжения, связанные с моментами, многократно превосходят однородное сжатие. Скажем, при сильном ветре угол вполне может достигать $\alpha = 5^\circ$, что соответствует $p'_M \approx 17{,}5 p' \approx 35$ атм. Усилие такое, как будто дерево, оставшись стоять вертикально, вытянулось на целых 350 метров вверх. К слову сказать, нагрузки, возникающие из-за напора ветра, еще больше. Немудрено, что настоящая буря крушит вековые сосны, как спички!

Усиление напряжений происходит благодаря множителю h/R. Причина его появления понятна. Вспомните правило рычага. Плечо сил, действующих на срезе, не больше диаметра ствола, а центр масс находится на заметной высоте. В итоге напряжения возрастают пропорционально h/R.

Точный расчет показывает, что напряжения, возникающие в однородном цилиндре под действием приложенного момента, распределены линейно. Они равны нулю на оси и доходят до $\pm 8M/(\pi R^3)$ на периферии, т.е. реально максимальные значения превосходят нашу среднюю оценку в 4 раза. Немало!

Ступенька на пне

Итак, мы показали, что при уходе от вертикали внутри ствола возникают неоднородные напряжения. Причем речь идет об эффекте недюжинной важности. Усилия, возникающие в наклонных деревьях, могут быть во много раз больше, чем в вертикальных. Более того, при мало-мальски значительном наклоне в теле дерева возникают не только сжатия, но и растяжения.

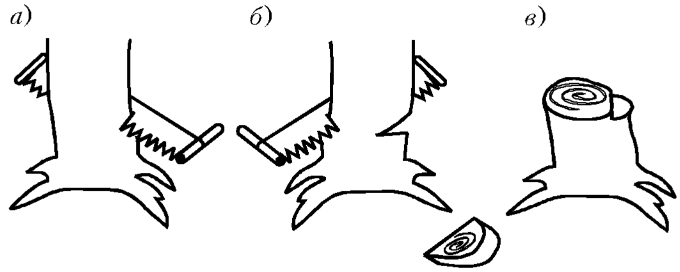


Рис.3. Толстое дерево валят в несколько приемов

При этом противоположная наклону сторона ствола обязательно оказывается растянута, а со стороны наклона дерево, наоборот, сжато.

Это свойство хорошо знают лесорубы. Пилить ствол (разумеется, если нет ветра) начинают оттуда, куда хотят повалить дерево (рис.3,*а*). Когда пила углубится примерно на треть толщины ствола, ее вынимают, не дожидаясь, пока дерево начнет наклоняться в сторону надпила и «зажимать» полотно. Сделав второй пропил под углом к первому, вынимают похожий на ломоть дыни клинообразный кусок. После этого начинают пилить с другой стороны чуть выше (почему?), чем в первый раз (рис.3,*б*). Как вы знаете, сторона, противоположная наклону, растянута, и по мере продвижения полотна наклон, а с ним и растяжение нарастают. Наконец, тонкая перемычка не выдерживает, и дерево падает точно в нужную сторону. А на пне, там где встретились два пропила, остается небольшая ступенька (рис.3,*в*).

Говорят, на соревнованиях умелый дровосек умеет положить древесный хлыст под углом к ветру, да так метко, что загонит в землю заранее вбитый судьями колышек.

Пружина замедленного действия

Однако, мы отвлеклись.

Итак, стоит дереву хоть чуточку наклониться, как внутри ствола возникают огромные напряжения. Сила тяжести стремится пригнуть дерево к земле, при этом одна сторона ствола растягивается, другая сжимается. Какой же механизм противостоит этому изгибу?

Предположим, что рост дерева происходит неравномерно и его скорость зависит от внутренних напряжений. Пусть, например, в сжатых областях ствола клетки делятся интенсивнее, чем в растянутых. Тогда обращенная в сторону наклона сжатая сторона будет обгонять в росте растянутую противоположную сторону. Сжатие возобладает, и ствол начнет выгибаться против наклона, т.е. наверх. Сомнений в том, что усилий, которые возникают при росте дерева, хватит, чтобы выправить ствол, нет. Если в городе, взламывая нежными шляпками асфальт, прорастают шампиньоны, что уж тут говорить о древесине!

Таким образом, мы с вами придумали механизм, который стремится выровнять ствол при уходе от вертикали. Этот механизм дополняет обычную упругость и включается, когда возникли значительные необратимые изменения (скажем, корни подмыло талыми водами, ствол надломило ветром и т.п.). Он действует куда медленнее упругости, причем результат, так же, как и вызвавшее отклик воздействие, носит необратимый характер.

Самое замечательное, что кроме отличий у нашего механизма есть немало общего с упругостью. А именно, он тоже приводит к возникновению своего рода колебаний, или, если хотите, волн. И хотя колебания эти безумно медленные, так что едва ли вам достанет терпения за ними следить, наблюдать их совсем просто.

Представьте себе, что когда-то в незапамятные времена над лесом, наломав дров, пронесся смерч. Шло время, последствия катастрофы стали забываться, и деревья потянулись кверху, как изображено на рисунке 4,*а*. Видите, нижняя часть ствола осталась наклонена вправо, а верхняя, более молодая, уже выровнялась. Посмотрим теперь, какие силы действуют на основание ствола. Давайте снова мысленно выделим какое-нибудь сечение $B–B$ и подумаем, как распределены напряжения. Ничего сложного, однако нас ждет сюрприз. Хотя верхушка дерева уже выровнялась и «стоит по струнке», центр масс все еще смещен вправо от корней. Это значит, что к нижней части ствола приложен изгибающий момент силы тяжести, который растягивает его левую сторону, сжимая, в свою очередь, правую.

Знакомая ситуация, не правда ли? Раз на основание ствола действует изгибающее усилие, все будет происходить так же, как в любом наклонном дереве. Ствол будет расти неравномерно, и дерево будет мало-помалу искривляться влево. В принципе, это могло бы прекратиться, когда центр масс окажется точно над корнем (рис.4,*б*). Однако в этот момент верхушка снова будет наклонена, правда уже налево, а значит, к ней опять будет приложен изгибающий момент силы тяжести (см. сечение $C–C$). В ответ она начнет тянуться направо, при этом перераспределятся напряжения в нижней части ствола. И весь цикл повторится снова.

Ответ, ничего не скажешь, неожиданный. Оказывается, что возврат ствола к вертикали – это колебательный процесс. И несмотря на всю свою медленность, он имеет вполне наглядные проявления. В результате последовательных перегибов в ту и другую сторону ствол дерева принимает волнообразную форму (рис.4,*в*).

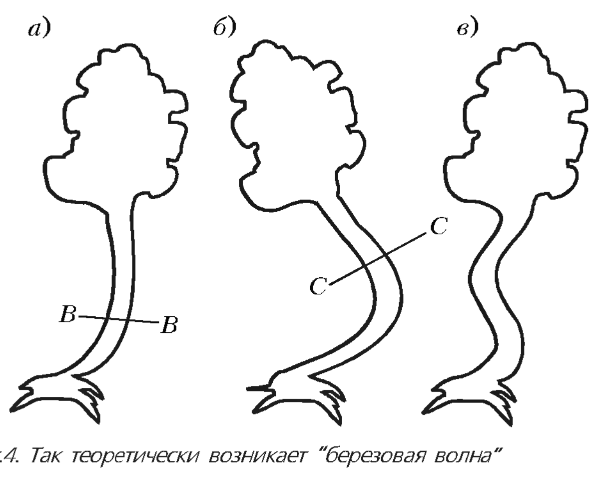


Рис.4. Так теоретически возникает "березовая волна"

Рис.5. Так «березовая волна» выглядит на самом деле

Подумав еще немного, вы поймете, что на вертикальных деревьях волны должны постепенно разглаживаться. Но поскольку в этом нет насущной необходимости, видимо, это происходит очень медленно. И тому есть причины. Прежде всего, напряжения, вызванные волновой деформацией вертикального ствола, намного меньше, чем возникающие при наклоне. Это уже ведет к замедлению. А если вдобавок наш механизм включается только тогда, когда напряжения достаточно велики, то разглаживания остаточных деформаций не происходит вовсе.

Взгляните теперь на фотографии, представленные на рисунке 5. Казалось бы, ничем не примечательные березы, каких тысячи. Но теперь, зная на что смотреть, вы без труда различите на всех деревьях пологую, но очень характерную синусоиду – «березовую волну». И не думайте, что в поисках примеров придется дотемна рыскать по лесу. Не верите? Посмотрите внимательно на первую попавшуюся вам березу.

Правило и исключения

На этом хотелось было бы поставить точку. Наша гипотеза нашла блестящее экспериментальное подтверждение. Мы доказали, что деревья вовсе не тянутся к свету, а просто сопротивляются изгибающим гравитационным моментам. И это им, пусть не без колебаний, удается. Подождите, зачем же доводить до абсурда? За контрпримерами дело тоже не станет. Видите, на фотографиях на рисунке 6 березы растут вовсе не вертикально, а под углом. И похоже, довольны жизнью. В чем же дело? Неужто ошибка?

Нет, просто пришло, наконец, время вспомнить, что для растений главное – все же свет. Ствол действительно выполняет важную несущую функцию. Но, тем не менее, его роль – это вынести крону наверх к солнцу. А сама крона формируется под действием солнечных лучей так, чтобы листьям досталось как можно больше света. Деревья, показанные на последнем снимке, выросли в условиях резко неравномерной освещенности. Поэтому кроны у них сформировались асимметрично, большинство веток растет с одной стороны и направлено из тени к свету.

Я не берусь судить, как именно это повлияло на рассмотренный нами механизм. Возможно, тяжесть веток создает дополнительный момент, который стремится вывести дерево из тени, и, как всякий постоянный фактор, он мог бы вызвать смещение положения равновесия. К сожалению, этот аргумент не выдерживает критики. Какая разница, откуда взялся приложенный к стволу момент: само ли дерево наклонилось или ветки потянулись к свету? На мой взгляд, более вероятно другое. Что если активное развитие веток на светлой стороне произошло за счет роста ствола? Тогда сжатая светлая сторона перестала обгонять растянутую темную, и никакого изгиба не возникло. Впрочем, это уже чистые домыслы.

А чтобы рассеять сомнения в том, что освещение все-таки сказывается на росте ствола, приведем еще один замечательный пример гелиотропизма. Карельская береза – родная сестра нашей, но растет она далеко на

Рис.6. Нередко стремление к свету все-таки перевешивает

севере, в приполярье. Ее ценная древесина отличается удивительным рисунком: кажется, будто тонкие волокна сплетены в кружево. Поэтому она очень крепкая, и это помогает деревцу пережить суровую зиму, выстоять против жестоких буранов. А знаете, почему так запутаны волокна?

Зимний ветер гнет стволы к снегу. Причешет, как гребнем, привалит снегом да и задует «против шерсти». Потом опять изменится, и так до весны. Глядь, когда снег сойдет, ни одного прямого ствола не осталось. «Пьяный лес» называется. Зато коротким северным летом, в пору белых ночей, солнце ходит по кругу и лишь мельком ныряет за горизонт. Тут уж деревца пускаются в рост. Листья, молодые побеги и вся верхняя часть ствола неотрывно следуют за солнцем и описывают вместе с ним круг за кругом. Так мало-помалу волокна и сплетаются в неповторимый узор.

Видите, до чего может додуматься физик, гуляя на досуге в осеннем лесу...

Кинематика в планиметрии

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

В самых разных сборниках геометрических задач можно встретить задачи такого рода: берется некий треугольник (четырехугольник) и на его сторонах строятся какие-либо треугольники (четырехугольники). Оказывается, что полученная конфигурация обладает особыми свойствами, каковые и предлагается обнаружить.

Методы решения этих задач чаще всего вполне стандартные. Но бывает, что используют векторы или преобразования. Мы хотим показать еще один способ решения задач такого типа. Основан он будет на векторах, но только рассматриваться эти векторы будут с кинематической точки зрения, как радиусы-векторы какой-то движущейся точки.[1] При этом мы опишем достаточно общий метод получения результатов. Да и сами результаты будут обладать некоторой степенью общности.

Для понимания дальнейшего необходимы некоторые сведения о векторах на плоскости.

Кроме хорошо известных линейных операций с векторами – сложения и умножения на число, нам понадобится еще одна линейная операция – поворот вектора на заданный угол. Если вектор $\vec{a}$ поворачивается на угол α, то в результате получается вектор, который мы будем обозначать так: $\vec{a}^{\alpha}$. При этом угол α может быть положительным – при повороте против часовой стрелки – и отрицательным – при повороте по часовой стрелке. Свойства этой операции таковы:

1°. $\left|\vec{a}^{\alpha}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

2°. $\vec{a}^{0} = \vec{a}$, $\vec{a}^{\pi} = -\vec{a}$, $\vec{a}^{2\pi} = \vec{a}$.

3°. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^{\alpha} = \vec{a}^{\alpha} + \vec{b}^{\alpha}$.

4°. $(\lambda\vec{a})^{\alpha} = \lambda\left(\vec{a}^{\alpha}\right)$.

Свойства 3° и 4° означают линейность операции поворота вектора.

5°. $\left(\vec{a}^{\alpha}\right)^{\beta} = \vec{a}^{\alpha+\beta}$.

Иначе говоря, если мы сначала поворачиваем вектор на угол α, а потом на угол β, то это означает, что мы повернули его на угол $\alpha+\beta$.

6°. $\vec{a}^{\alpha+\beta} = \vec{a}^{\beta+\alpha}$.

Иначе говоря, поворот вектора на суммарный угол можно выполнять в любом порядке – результат не изменится.

7°. $\left(\vec{a}^{\alpha}\right)^{-\alpha} = \vec{a}$.

Переходим теперь к кинематическим фактам. Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор движущейся точки, а $\vec{V}$ – ее скорость. Тогда справедливы следующие утверждения:

8°. Если $\vec{r} = \overrightarrow{\text{const}}$, то $\vec{V} = \vec{0}$.

9°. Если $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, то $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

10°. Если $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, то $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \overrightarrow{\text{const}}$.

11°. Если $\vec{r}_2 = \lambda\vec{r}_1$, то $\vec{V}_2 = \lambda\vec{V}_1$.

12°. Если $\vec{V}_2 = \lambda\vec{V}_1$, то $\vec{r}_2 = \lambda\vec{r}_1 + \overrightarrow{\text{const}}$.

13°. Если $\vec{r}_2 = \vec{r}_1^{\alpha}$, то $\vec{V}_2 = \vec{V}_1^{\alpha}$.

14°. Если $\vec{V}_2 = \vec{V}_1^{\alpha}$, то $\vec{r}_2 = \vec{r}_1^{\alpha} + \overrightarrow{\text{const}}$.

Доказательства равенств 1°–14° приведены в упомянутой выше книге. По сути своей равенства 8°–14° сводятся к дифференцированию и интегрированию вектора-функции. Заметим, что постоянный вектор в равенствах 10°, 12°, 14° зависит от выбора начала радиусов-векторов. Это значит, что при разных началах радиусов-векторов константа меняется. В остальных равенствах выбор начала не имеет значения, т.е. если равенство верно при выборе начала в какой-то точке, то оно верно и тогда, когда начало выбрано в любой другой точке.

Заметим также, что хотя для задания положения движущейся точки радиусом-вектором начало его может быть выбрано произвольно, для задания ее скорости это не существенно. В самом деле, посмотрим на рисунок 1. На нем изображена движущаяся точка M, а также два ее радиуса-вектора с началами в разных точках O_1 и O_2: $\overrightarrow{O_1M} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{O_2M} = \vec{r}_2$. Из рисунка видно, что $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2O_1} + \vec{r}_1$, где вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$ является постоянным. Дифференцируя это равенство по времени, мы получим, что производные радиусов-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ равны. Это и будет скорость точки M.

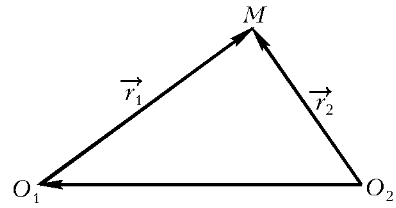


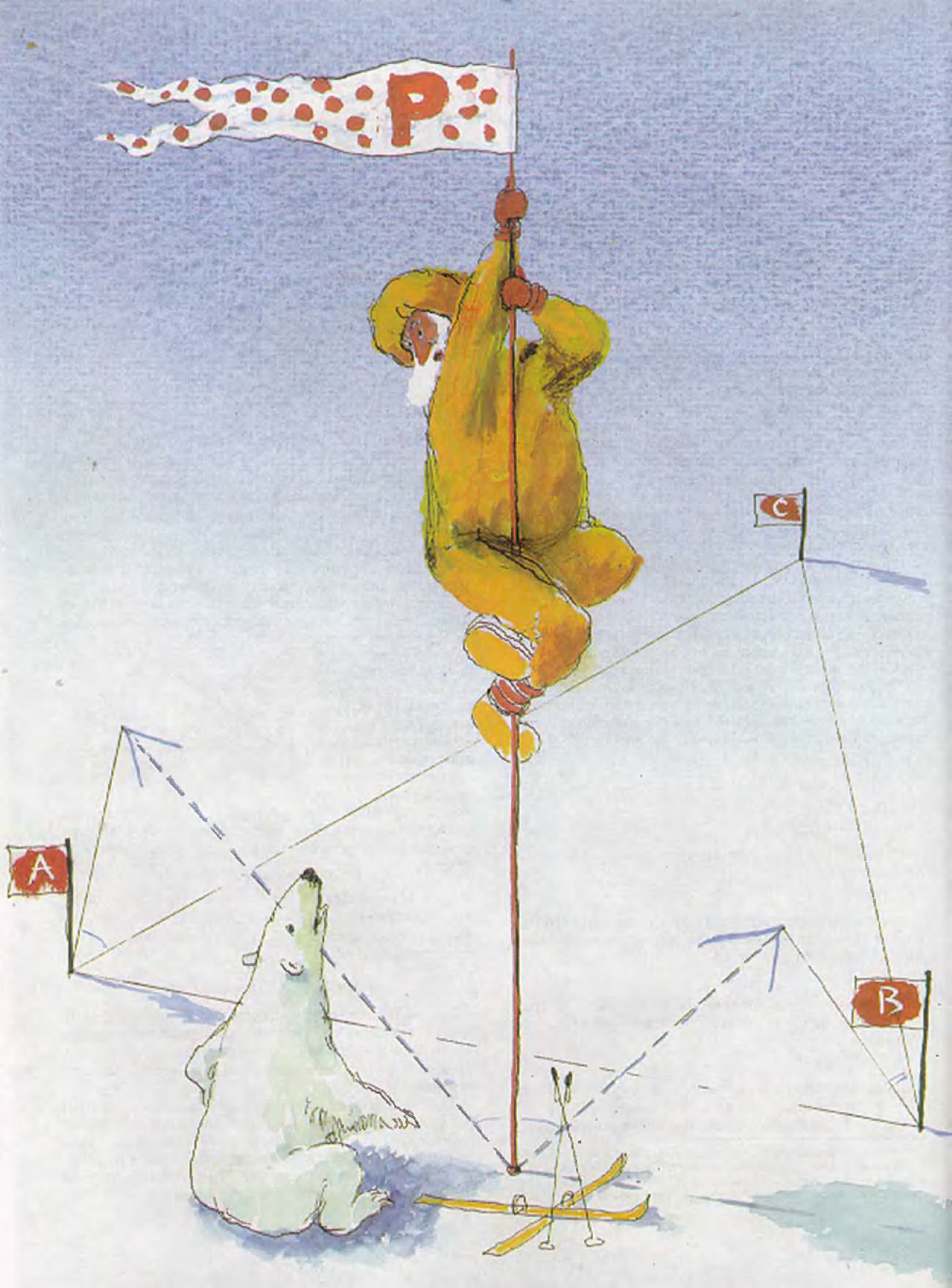
Рис. 1

Кинематика в треугольнике

Теперь покажем, как работает векторно-кинематическая техника, на частном примере, при решении такой задачи. (В дальнейшем ориентация вершин треугольников и четырехугольников – против часовой стрелки.)

Задача 1. *На сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю от треугольника сторону построены квадраты (рис.2). Точки N и M – центры этих квадратов, а точка K – середина стороны AB. Докажите, что треугольник NKM – равнобедренный прямоугольный с прямым углом при вершине K.*

[1] *Необходимая теория для использования этого метода подробно описана в книге: Ю.И.Любич, Л.А.Шор. «Кинематический метод в геометрических задачах» (М.: Наука, 1976). Из этой же книги взяты некоторые приведенные дальше задачи.*


P
C
A
B

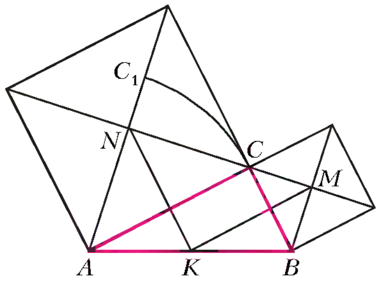


Рис. 2

Решение. Заметим, что в результате поворота вектора $\overrightarrow{AC}$ на 45° вокруг точки A точка C переходит в точку C_1, лежащую на диагонали квадрата, построенного на стороне AC: $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC}^{45°}$. В результате поворота вектора длина его не меняется, а потому $AC_1 = AC$. Так как $AN = AC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $AN = AC_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда имеем, что $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}^{45°}$.

Аналогично получаем, что $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BC}^{-45}$.

Начнем двигать точку C по плоскости, оставив сторону AB неподвижной. Проследим, что будет происходить при этом с центрами построенных квадратов – точками N и M.

В процессе движения точки C (согласно 13°) будет выполняться равенство

$$\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{45°}. \qquad (1)$$

(В последнем равенстве радиусы-векторы имеют начало в точке A.)

Аналогичными рассуждениями, взяв начало в точке B, получаем, что $\vec{V}_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{-45°}$, откуда $\vec{V}_C = \sqrt{2}\vec{V}_M^{45}$. Подставив полученное выражение для вектора $\vec{V}_C$ в равенство (1), выводим (используя 5°), что $\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\vec{V}_M^{45°}\right)^{45°} = \vec{V}_M^{90°}$.

Из этого равенства следует (согласно 14°), что $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{\,90°} + \vec{R}$, где $\vec{R}$ – некоторый постоянный вектор, т.е. вектор, который не меняется при движении точки C. Поэтому, если при некотором положении точки C окажется, что $\vec{R} = \vec{0}$, то $\vec{R} = \vec{0}$ и при любом другом положении точки C, а тогда $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{\,90°}$ также при любом положении точки C.

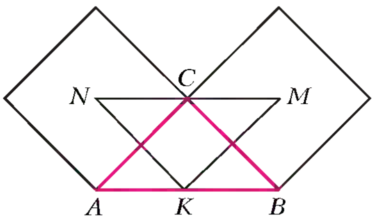


Рис. 3

Поместим точку C в положение, когда она является вершиной равнобедренного прямоугольного треугольника BCA (рис.3). Тогда, очевидно, центры квадратов – точки M и N – и середина отрезка AB – точка K – являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника NKM, т.е. $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{\,90°}$ (если за начало радиусов-векторов принять точку K). Следовательно, в этом положении точки C имеем $\vec{R} = \vec{0}$, а по сказанному выше $\vec{R} = \vec{0}$ при любом положении точки C. Но тогда треугольник NKM – равнобедренный прямоугольный также при любом положении точки C.

Прежде чем двинуться дальше, отметим, что важную роль здесь сыграло нахождение «хорошей точки» (мы будем называть ее полюсом) для начала радиусов-векторов (такой точкой оказалась точка K).

Перейдем теперь к решению более общей задачи.

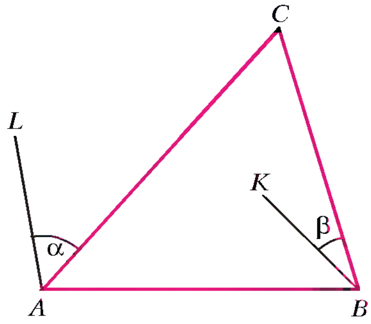


Рис. 4

Задача 2 (теоретическая). *Пусть нам дан треугольник ABC, $AB = c$. Пусть отрезок AL расположен так, что $\angle LAC = \alpha$ и $AL : AC = m$, а отрезок BK – так, что $\angle KBC = \beta$ и $BK : BC = n$ (рис.4). (На этом рисунке углы α, β положительны – для определенности, на самом деле это не принципиально.) Пусть точка O_1 – произвольная точка плоскости. Обозначим $\overrightarrow{O_1L} = \vec{r}_L$, $\overrightarrow{O_1K} = \vec{r}_K$. Требуется найти соотношение между $\vec{r}_L$ и $\vec{r}_K$ через m, n, α, β, точнее, выразить $\vec{r}_L$ через $\vec{r}_K$ и эти параметры.*

Решение. Вектор $\overrightarrow{AL}$ является образом вектора $\overrightarrow{AC}$ в результате поворота его на угол α и умножения на число m. Таким образом,

$$\overrightarrow{AL} = m\overrightarrow{AC}^{\alpha}. \qquad (2)$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{BK} = n\overrightarrow{BC}^{\beta}. \qquad (3)$$

Теперь закрепим вершины A, B треугольника ABC и будем двигать точку C со скоростью $\vec{V}_C$. Скорости точек K и L обозначим $\vec{V}_K$, $\vec{V}_L$ соответственно. Из (2) и (3) получаем такие равенства:

$$\vec{V}_L = m\vec{V}_C^{\alpha}, \qquad (4)$$

$$\vec{V}_K = n\vec{V}_C^{\beta}. \qquad (5)$$

Из (5) получим, что

$$\vec{V}_C = \frac{1}{n}\vec{V}_K^{-\beta}. \qquad (6)$$

Подставим полученное в (6) значение для $\vec{V}_C$ в (4) и получим

$$\vec{V}_L = m\vec{V}_C^{\alpha} = m\left(\frac{1}{n}\vec{V}_K^{-\beta}\right)^{\alpha} = \frac{m}{n}\vec{V}_K^{\alpha-\beta}. \qquad (7)$$

Переходя к соотношению между радиусами-векторами, получим (используя 14°)

$$\vec{r}_L = \frac{m}{n}\vec{r}_K^{\,\alpha-\beta} + \vec{R}. \qquad (8)$$

Тем самым мы решили поставленную задачу – нашли соотношение между векторами $\vec{r}_L$ и $\vec{r}_K$. Так как постоянный вектор $\vec{R}$ зависит от выбора начала радиусов-векторов $\vec{r}_L$, $\vec{r}_K$, то попытаемся подходящим выбором начала обратить этот вектор в нулевой. Тогда, если удастся найти такую «хорошую точку», формула (8) примет вид

$$\vec{r}_L = \frac{m}{n}\vec{r}_K^{\,\alpha-\beta}.$$

Иначе говоря, если нам удастся обратить постоянный вектор $\vec{R}$ в нулевой (за счет выбора начала радиусов-векторов в некоторой точке P, которую мы будем называть полюсом), то в любой момент времени, т.е. при любом положении точки C, отрезок KL будет виден из полюса P под углом $\alpha - \beta$, а отрезки PL и PK

Иллюстрация П.Чернуского

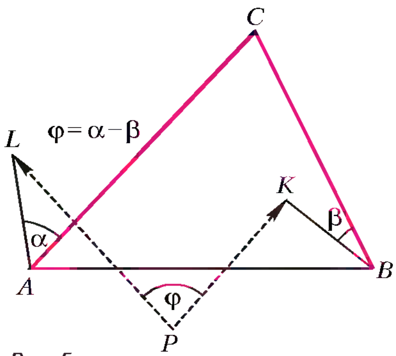


Рис. 5

будут относиться как $m : n$, т.е.

$$PL : PK = m : n.$$

Можно даже записать точнее (рис.5):

$$\overrightarrow{PL} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PK}^{\alpha-\beta}. \quad (9)$$

Задача сводится к нахождению полюса P, т.е. к однозначному определению его положения относительно неподвижного (в процессе движения точки C) отрезка AB. Для этого будем искать определяющий момент времени. В частности, такой момент наступит тогда, когда точка C совпадет с точкой B или с точкой A. Докажем это.

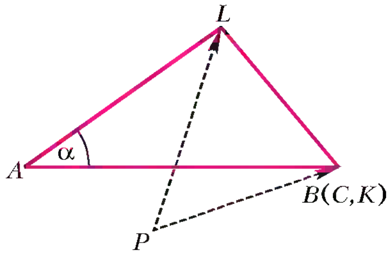


Рис. 6

Рассмотрим случай (рис.6), когда точка C совпадает с точкой B. Тогда и точка K совпадает с точкой B. (Иначе говоря, треугольник BCK вырождается в точку.) Сначала заметим, что из равенства (9) для векторов $\overrightarrow{PL}$ и $\overrightarrow{PK}$ следует, что

$$PL = \frac{m}{n}PK.$$

Далее, по теореме косинусов из треугольника KLA находим

$$KL = c\sqrt{1+m^2-2m\cos\alpha}.$$

Теперь можем найти отрезки PK и PL. Сначала по теореме косинусов из треугольника PKL находим

$$KL = PK\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)},$$

откуда

$$PK = \frac{KL}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)}}. \quad (10)$$

Тогда

$$PL = \frac{m}{n}PK = \frac{KL}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1 - 2\frac{n}{m}\cos(\alpha-\beta)}}.$$

В результате найдены три стороны в треугольнике PKL, и тем самым положение полюса P можно установить. Но по трем сторонам можно построить два треугольника, поэтому надо следить за соответствующей ориентацией угла между векторами $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{PL}$ – она должна соответствовать знаку разности $\alpha-\beta$.

Выделим из общего решения три частных случая: 1) $\alpha-\beta=0^\circ$: а) $m = n$; б) $m \ne n$; 2) $\alpha-\beta=180^\circ$. Случай 1,а) несколько особый, мы рассмотрим его позже. В случаях 1,б и 2 векторы $\overrightarrow{PL}$ и $\overrightarrow{PK}$ коллинеарны, причем в случае 1,б они сонаправлены, а в случае 2 – противоположно направлены. Отсюда следует, что в случае 1,б точка P лежит вне отрезка KL, а в случае 2 точка P лежит на отрезке KL. Проиллюстрируем случаи 1,б и 2 на конкретных задачах.

Случай $\alpha-\beta=0^\circ$; $m \ne n$. Так как угол между отрезками PK и PL в этом случае равен 0°, то треугольник PLK вырождается в отрезок. По формуле (10) получаем

$$PK = \frac{KL}{\left|1-\frac{m}{n}\right|} \quad \left(\text{или } PL = \frac{m}{n}PK\right).$$

В этом случае полюс P лежит на прямой KL вне отрезка KL. Положение точки P относительно точек K, L зависит от величины m/n и устанавливается однозначно.

В дальнейшем мы постоянно используем результаты и обозначения этой задачи (α, β, P).

Задача 3. *На сторонах треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и BCK с острыми углами α и γ (рис.7). Точка Q лежит на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой AB. При этом $AQ = AB\operatorname{tg}\gamma$. Докажите, что точки Q, L, K лежат на одной прямой и $QL : QK = \cos^2\alpha$.*

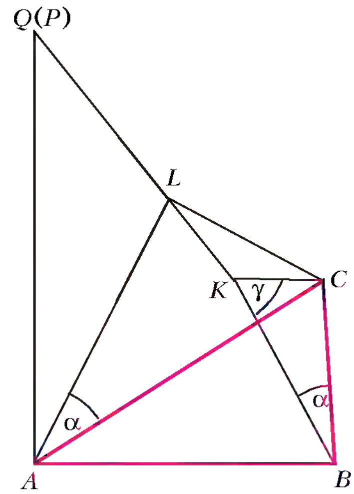


Рис. 7

Решение. В этой задаче $\alpha-\beta=0^\circ$, $m=\cos\alpha$, $n = 1/\cos\alpha$ ($m \ne n$). Значит, полюс P, точки L и K лежат на одной прямой и при этом $PL : PK = m : n = \cos^2\alpha$. Осталось доказать, что полюс P совпадает с точкой Q. Для этого воспользуемся обоими определяющими положениями точки C. Сначала совместим точку C с точкой A (рис.8). Новое положение точки C – C_1 – и новое положение точки L – L_1 – совпадут с точкой A, а точка K займет положение K_1 (треугольник ACL вырождается в точку). В этом случае полюс P лежит на одной прямой с точками L_1, K_1, в данной ситуации – на перпендикуляре к AB, проходящем через точку A. Затем совместим точку C с точкой B. Тогда новое положение точки C – C_2 – и новое положение точки K – K_2 – совпадут с точкой B, а точка L займет положение L_2 (треугольник BCK вырождается в точку). В этом случае полюс P лежит на одной прямой с точками L_2, K_2. Оказывается, что полюс P является точкой пересечения прямых K_1L_1 и K_2L_2, т.е. точкой Q. Отсюда и следует, что $AQ = AB\operatorname{tg}\gamma$.

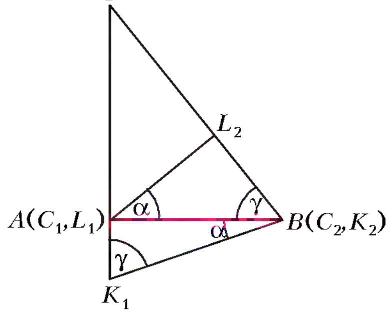


Рис. 8

(Вместо того, чтобы брать два определяющих момента, можно взять только один из них и использовать отношение $m : n$.)

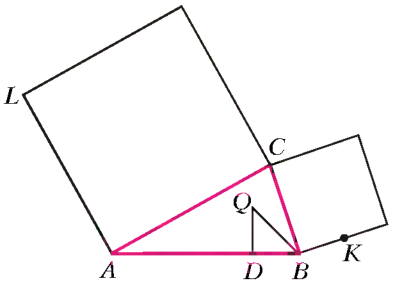


Рис. 9

Случай $\alpha - \beta = 180^\circ$. В этом случае треугольник PLK вырождается в отрезок, и искомый полюс P лежит внутри отрезка LK и делит его в отношении $m : n$.

Задача 4. *На сторонах треугольника ABC построены квадраты (рис.9). Точка L – вершина одного квадрата, а точка K – середина стороны другого. Точка Q – вершина равнобедренного прямоугольного треугольника QDB, катеты которого $BD = DQ = (1/3)AB$. Докажите, что точки L, Q и K лежат на одной прямой и точка Q делит отрезок LK в отношении $2 : 1$.*

Решение. Здесь $\alpha = 90^\circ$, $\beta = -90^\circ$, $m = 1$, $n = 1/2$. Поскольку в этой задаче $\alpha - \beta = 180^\circ$ и $m/n = 2$, то искомый полюс P лежит на отрезке LK и делит его в отношении 2 : 1. Осталось только доказать, что полюс находится в точке Q, которая указана в условии задачи.

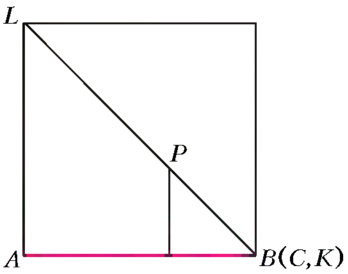


Рис. 10

Совместим точку C с точкой B (рис.10). Квадрат, построенный на стороне BC, вырождается в точку. Полюс P должен лежать на диагонали LB квадрата, построенного на стороне AB, и делить LB в отношении 2 : 1, т.е. $PB = 0{,}5PL = (1/3)BL$. Отсюда $BD = (1/3)AB$, а точки P и Q совпадают.

Общий случай. Рассмотрим теперь решение конкретной задачи в общем случае, когда $\alpha \neq \beta$ и $m \neq n$.

Задача 5. *На сторонах AC и BC треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и BKC с острым углом 30° (рис.11). Точка Q делит отрезок AB в отношении $AQ : QB = 3 : 1$. Докажите, что треугольник LQK прямоугольный.*

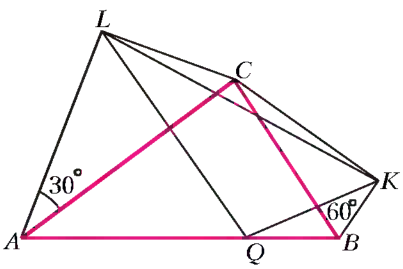


Рис. 11

Решение. Здесь мы имеем такие соотношения: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -60^\circ$, $\alpha - \beta = 90^\circ$, $m = AL/AC = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $n = BK/BC = \cos 60^\circ = 1/2$, $m/n = \sqrt{3}$. Найдем полюс P в этом случае. Совместим точку C с точкой B. При этом треугольник BKC выродится в точку, треугольник CLA займет положение, показанное на рисунке 12. В данном случае, поскольку $\alpha - \beta = 90^\circ$ и $m/n = \sqrt{3}$, полюс P является вершиной прямого угла прямоугольного треугольника с гипотенузой BL и отношением катетов $PL : PK = m/n = \sqrt{3}$. Легко проверить, что точка Q, заданная в условии задачи, отвечает этим требованиям.

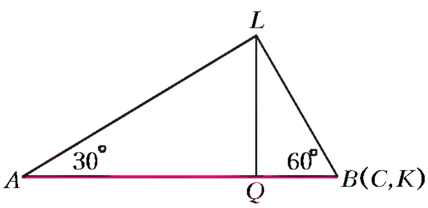


Рис. 12

Тем самым получается, что полюс P совпадает с точкой Q. Отсюда и следует, что треугольник LQK – прямоугольный.

В самом общем случае отыскание полюса P сводится к задаче нахождения точки пересечения двух окружностей (или двух дуг окружностей). Одна из них – множество точек, из которых отрезок KL виден под углом $\alpha - \beta$. Другая – множество точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек K, L постоянно и равно m/n, это окружность Аполлония.

Теперь ясно, что возможны и другие специальные случаи, отличные от вышеприведенных трех. Например, при $m = n$ окружность Аполлония заменяется на серединный перпендикуляр отрезка KL, а при $\alpha - \beta = 90^\circ$ полюс P лежит на окружности с диаметром KL. Из этих рассуждений ясно, что полюс существует всегда, за исключением единственного случая, когда $\alpha - \beta = 0^\circ$ и $m = n$. Можно сказать, что здесь полюс «уходит в бесконечность».

В этом случае можно воспользоваться формулой (8), которая примет вид $\vec{r}_L = \vec{r}_K + \vec{R}$, или $\vec{r}_L - \vec{r}_K = \vec{R}$, что равносильно равенству $\overrightarrow{KL} = \vec{R}$ (в таком случае говорят, что отрезок KL движется поступательно). Последнее равенство означает, что вектор $\overrightarrow{KL}$ не зависит от положения точки C.

Задача 6. *На сторонах треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и CKB с острыми углами α и γ (рис.13). Докажите, что $KL = AB\cos\gamma$ и KL образует с прямой AB угол γ.*

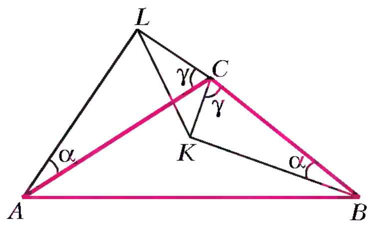


Рис. 13

Решение. В этой задаче $\alpha - \beta = 0^\circ$, $m = n = \cos\alpha$, т.е. $\overrightarrow{KL} = \vec{R}$. В качестве определяющего положения точки C выберем такое, когда она совмещена с точкой B. Тогда и точка K совпадет с точкой B (треугольник BCK вырождается в точку). При этом $KL = AB\cos\gamma$ и образует с прямой AB угол γ, что и требовалось доказать (рис.14).

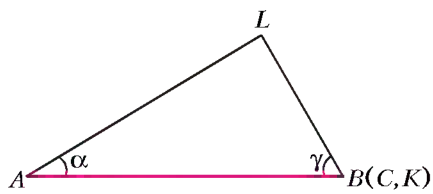


Рис. 14

Из разобранных задач ясно, что главный момент решения – нахождение полюса относительно заданного в условии треугольника. Более того, становится ясно, как составлять задачи такого рода. Можно взять треугольник, два «хороших» угла α и β (например такие, чтобы их разность была 0°, 90° или 180°), два удобных числа, найти при этих данных полюс. Затем указать три точки, соответствующие выбранным углам, числам и полюсу. И сформулировать задачу о взаимном положении полученных трех точек. Попробуйте!

(Напоминаем, что ориентация вершин треугольников и четырехугольников – против часовой стрелки.

Кроме того, вершина прямого угла треугольника в обозначении треугольника записывается посередине.)

Упражнения

1. На сторонах AC и BC треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ALC ($AL = CL$) и BKC ($BK = KC$) с углом 30° при основании. Докажите, что $KL = \frac{AB}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямыми KL и AB.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABQ ($AB = BQ$), BKC ($BK = KC$) и LCA ($CA = CL$). Докажите, что точки Q, K, L лежат на одной прямой и точка K делит отрезок QL пополам.

3. На стороне AC треугольника ABC построен равнобедренный треугольник ACL ($AL = CL$) с углами при основании, равными 30°, а на стороне BC – прямоугольный треугольник KCB с прямым углом при вершине C и углом 30° при вершине B. Точка Q делит сторону AB в отношении $AQ : QB = 1 : 2$. Докажите, что треугольник KLQ – прямоугольный с прямым углом при вершине L и углом 60° при вершине Q.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABQ и LAC с прямыми углами при вершинах B и A соответственно. Точка K лежит на продолжении стороны BC ($BK = BC$). Докажите, что треугольник KQL – прямоугольный равнобедренный с прямым углом при вершине Q.

Кинематика в четырехугольнике

Аналогичные соображения используются, когда исходной фигурой является четырехугольник. Посмотрим на решение такой задачи.

Задача 7. *В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD (рис.15). На боковых сторонах трапеции вне трапеции построены прямоугольные равнобедренные треугольники DLA и BKC. Из середины M основания AB проведен вне трапеции перпендикуляр MQ такой, что $MQ = \frac{1}{4}AB$. Докажите, что отрезки QL и QK равны и взаимно перпендикулярны.*

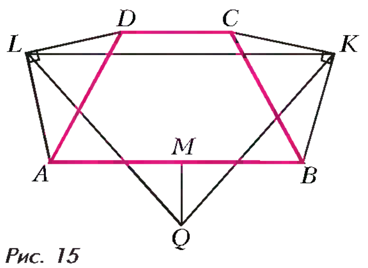


Рис. 15

Решение. Прежде всего из данных задачи заметим, что

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}^{45^\circ} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BC}^{-45^\circ}.$$

Теперь, не двигая основания AB, будем поступательно перемещать основание CD. При таком перемещении $\vec{V}_D = \vec{V}_C$. Из этих соотношений получаем, что $\vec{V}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_D^{45^\circ}$, $\vec{V}_K = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_D^{-45^\circ}$. Отсюда $\vec{V}_D = \vec{V}_C = \sqrt{2}\vec{V}_K^{45^\circ}$. Поэтому выполняется равенство $\vec{V}_L = \vec{V}_K^{90^\circ}$. Но тогда выполняется соотношение $\vec{r}_L = \vec{R}_K^{90^\circ} + \vec{R}$. Следовательно, существует такая точка P, что $\vec{R} = \vec{0}$, т.е.

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PK}^{90^\circ}. \tag{11}$$

Найдем положение этой точки P. В качестве определяющего возьмем такое положение основания CD, при котором отрезки KC, CD, DL окажутся на одной прямой KL, их объединение будет отрезком KL, равным и параллельным AB, и четырехугольник $ABKL$ будет прямоугольником (рис.16).

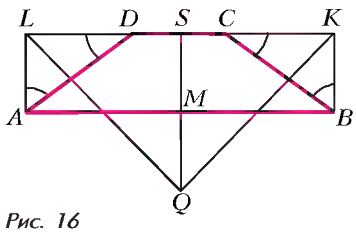


Рис. 16

При этом окажется – это легко показать, – что $LA = KB = \frac{1}{4}AB$. Если теперь построить точку Q так, как указано в условии задачи, и продлить отрезок QM до пересечения его с KL в точке S, то, очевидно, получим, что $QS = 2QM = SL = SK$ и $SQ \perp KL$. Последнее означает, что треугольники QSL и KSQ равные между собой, прямоугольные и равнобедренные. Отсюда заключаем, что $\angle LQK = 90^\circ$ и $QK = QL$. Сравнивая последние равенства с равенством (11), мы видим, что точки P и Q совпадают.

Следовательно, это выполняется и в любом другом положении.

Упражнения

5. В четырехугольнике $ABCD$ сторона CD вдвое меньше стороны AB и образует с ней угол 60°. На сторонах BC и AD построены равнобедренные треугольники BKC ($BK = KC$) и ADL ($LA = LD$) с углами 30° при основании, а на стороне AB – прямоугольный треугольник AQB с углом 60° при вершине A, углом 30° при вершине B и прямым углом при вершине Q. Докажите, что треугольник QKL равносторонний.

6. В четырехугольнике $ABCD$ сторона CD вдвое меньше стороны AB и образует с ней угол 60°. На сторонах BC и AD построены подобные прямоугольные треугольники KCB и ADL с углами 30° при вершинах B и A и прямыми углами при вершинах C и D. Докажите, что треугольник AKL равносторонний.

7. В трапеции $ABCD$ основание CD вдвое меньше основания AB. На ее боковых сторонах AD и BC построены равнобедренные прямоугольные треугольники ADL и BCK с гипотенузами AL и BK соответственно. Найдите отношение отрезков KL и AB, а также угол между ними.

Приращения и скорости

Теперь мы перейдем к получению новых, но вполне очевидных векторных соотношений. Пусть точки A и B движутся в плоскости таким образом, что все время выполняется равенство

$$\vec{V}_B = m\vec{V}_A^{\alpha}, \tag{12}$$

где m и α – постоянные. Из равенства (12) получаем интегрированием уравнение

$$\vec{r}_B = m\vec{r}_A^{\alpha} + \vec{R}. \tag{13}$$

Постоянную $\vec{R}$ найдем из следующих начальных условий: пусть при $t = 0$ (в начальный момент времени) $\vec{r}_A = \vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_B = \vec{r}_{B_0}$. Подставляя значения $\vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_{B_0}$ в (13), получим

$$\vec{R} = \vec{r}_{B_0} - m\vec{r}_{A_0}^{\alpha}.$$

Тогда равенство (13) приводится к равенству

$$\vec{r}_B - \vec{r}_{B_0} = m\left(\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0}\right)^{\alpha}. \tag{14}$$

Но разности векторов $\vec r_A - \vec r_{A_0}$ и $\vec r_B - \vec r_{B_0}$ есть векторы перемещений точек A и B:

$$\vec r_A - \vec r_{A_0} = \Delta\vec r_A, \quad \vec r_B - \vec r_{B_0} = \Delta\vec r_B ,$$

т.е. вместо (14) запишем равенство

$$\Delta\vec r_B = m\Delta\vec r_A^{\,\alpha} . \qquad (15)$$

Таким образом, мы доказали лемму: *если при движении точек A и B в плоскости выполняется равенство (12) или (13) (включая случай, когда постоянный вектор является нулевым), то выполняется равенство (15).*

Теперь вернемся к равенствам (4), (5), (7). Из них, соответственно, следуют равенства

$$\Delta\vec r_L = m\Delta\vec r_C^{\,\alpha} , \quad \Delta\vec r_K = n\Delta\vec r_C^{\,\beta} , \quad \Delta\vec r_L = \frac{m}{n}\Delta\vec r_K^{\,(\alpha-\beta)} . \qquad (16)$$

Собственно говоря, равенства (4), (5), (7) являются частными случаями соответственных равенств (16), если положить начальные радиусы-векторы точек K, L, C равными нуль-вектору:

$$\vec r_{C_0} = \vec r_{K_0} = \vec r_{L_0} = \vec 0 .$$

Перейдем к примерам использования полученных соотношений.

Задача 8. *Вернемся к задаче 6 и дадим ее решение в новой технике.*

Решение. Из треугольника ACL (см. рис.13) имеем равенство $\overrightarrow{CL} = \cos\gamma\left(\overrightarrow{CA}^{-\gamma}\right)$, что соответствует (13) при $\vec R = \vec 0$. Поэтому, если оставлять точку C неподвижной, то, согласно лемме, $\overrightarrow{\Delta r_L} = \cos\gamma\overrightarrow{\Delta r_A}^{-\gamma}$. Переместим точку A в точку B: $\overrightarrow{\Delta r_A} = \overrightarrow{AB}$. При этом точка L переместится в точку K: $\overrightarrow{\Delta r_L} = \overrightarrow{LK}$. Но тогда $\overrightarrow{LK} = \cos\gamma\left(\overrightarrow{AB}^{-\gamma}\right)$, т.е. $LK = AB\cos\gamma$ и образует с AB угол γ.

Задача 9. *На сторонах произвольного четырехугольника ABCD построены равнобедренные прямоугольные треугольники DL_1A, CK_1D, BL_2A, CK_2B (рис.17). Требуется доказать, что отрезки K_1K_2 и L_1L_2 взаимно перпендикулярны и равны.*

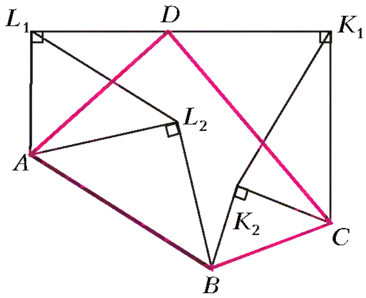


Рис. 17

Решение. Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник DL_1A. Из него получаем

$$\angle L_1AD = \alpha = 45^\circ ,$$

$$AL_1 : AD = m = \frac{1}{\sqrt2} .$$

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник CK_1D. Из него получаем

$$\angle K_1CD = \beta = -45^\circ , \quad CK_1 : CD = n = \frac{1}{\sqrt2} .$$

Таким образом, $m : n = 1$, $\alpha - \beta = 90^\circ$.

Переместим теперь точку D в точку B. Тогда точка L_1 переместится в точку L_2, а точка K_1 переместится в точку K_2. Отсюда векторы перемещений точек D, L_1 и K_1 равны

$$\Delta\vec r_D = \overrightarrow{DB} , \quad \Delta\vec r_{L_1} = \overrightarrow{L_1L_2} , \quad \Delta\vec r_{K_1} = \overrightarrow{K_1K_2} .$$

Осталось воспользоваться формулами (16):

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DB}^{45^\circ} , \quad \overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DB}^{-45^\circ} , \quad \overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{K_1K_2}^{90^\circ} .$$

Последнее равенство показывает нам перпендикулярность прямых K_1K_2 и L_1L_2 и равенство отрезков K_1K_2 и L_1L_2.

Задача 10. *На сторонах AD, BC и на диагоналях AC, BD параллелограмма ABCD построены равнобедренные прямоугольные треугольники DLA, CMB, CNA, DKB соответственно (прямые углы – в точках L, K, N, M). Докажите, что KMNL – квадрат (рис.18).*

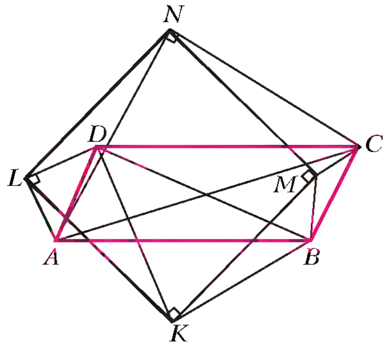


Рис. 18

Решение. Рассмотрим треугольник DLA. В этом треугольнике выполняется равенство $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DA}^{-45^\circ}$.

Рассмотрим перемещение этого треугольника такое, при котором точка D остается неподвижной, а точка A перемещается в точку B. При таком перемещении точка L попадет в точку K. При этом $\Delta\vec r_A = \overrightarrow{AB}$, $\Delta\vec r_L = \overrightarrow{LK}$. Тогда из леммы приходим к равенству

$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ} .$$

Точно так же, рассматривая треугольник ABC и построенные на его сторонах треугольники CNA и CMB, мы получим, рассматривая аналогичное перемещение, что

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ} . \qquad (17)$$

Из двух последних равенств мы видим, что $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{LK}$, поэтому $KMNL$ – параллелограмм.

Аналогично можно доказать, что верно равенство $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DC}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AB}^{45^\circ}$ (так как $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$). Сравнивая полученные выражения для KM и LK, видим, что $KM = LK$, а потому $KMNL$ – ромб.

И, наконец, $KMNL$ – квадрат. В самом деле, из равенства $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AB}^{45^\circ}$ мы получаем равенство $\overrightarrow{AB} = \sqrt2\overrightarrow{KM}^{-45^\circ}$. Подставим найденное значение для $\overrightarrow{AB}$ в равенство (17) и получим

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt2}\left(\sqrt2\overrightarrow{KM}^{-45^\circ}\right)^{-45^\circ} = \overrightarrow{KM}^{-90^\circ} .$$

Из этого равенства видим, что угол NMK прямой. Но тогда ромб $KMNL$ является квадратом.

В заключение можно заметить, что задача обобщается на произвольный четырехугольник. На двух его сторонах и диагоналях строятся соответствующим образом подобные треугольники и четыре их вершины оказываются вершинами параллелограмма.

Рассмотренная идея решения имеет некую модификацию. Проиллюстрируем ее на такой задаче.

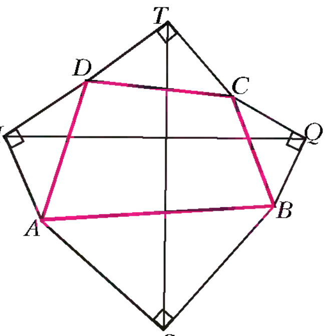


Рис. 19

Задача 11. *Дан четырехугольник ABCD. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники DMA, CTD, BQC, ASB (рис.19). Докажите, что отрезки MQ и ST равны и взаимно перпендикулярны.*

Решение. Переместим точку M в точку Q в два приема. Сначала переместим точку D в точку B, оставляя точку A неподвижной. Тогда точка M займет некое положение M_1 (рис.20). Поскольку при этом $m = AM : AD = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = 45^\circ$, то

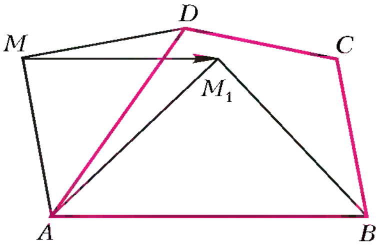


Рис. 20

$$\left(\Delta\vec r_M\right)_1 = \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{\sqrt2}\Delta\vec r_D^{\,45^\circ} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}, \text{ т.е. } \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}.$$

Затем, не двигая точку B, совместим точку A с точкой C. При этом точка M_1 совместится с точкой Q (рис.21). Так как в этом случае $m = BM_1 : BA = \dfrac{1}{\sqrt2}$ и $\alpha = -45^\circ$, то вектор $\overrightarrow{M_1Q}$ перемещения точки M_1 связан с вектором $\overrightarrow{AC}$ перемещения точки A равенством

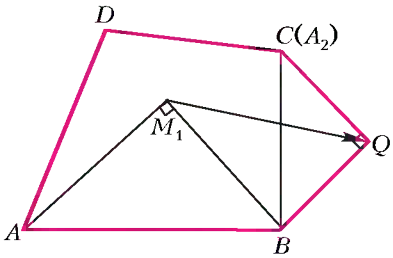


Рис. 21

$$\left(\Delta\vec r_M\right)_2 = \overrightarrow{M_1Q} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AC}^{-45^\circ}.$$

Окончательно имеем

$$\overrightarrow{MQ} = \Delta\vec r_M = \left(\Delta\vec r_M\right)_1 + \left(\Delta\vec r_M\right)_2 = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1Q} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\left(\overrightarrow{DB}^{45^\circ} + \overrightarrow{AC}^{-45^\circ}\right). \quad (18)$$

Аналогично поступим с точкой T. Сначала, оставляя неподвижной точку D, совместим точку C с точкой A. При этом точка T займет положение T_1 (рис.22). И тогда будут выполнены равенства

$$\left(\Delta\vec r_T\right)_1 = \overrightarrow{TT_1} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{CA}^{45^\circ} = -\frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{AC}^{45^\circ}.$$

Затем, не меняя положения точки A, совместим точку D с точкой B. Тогда точка T_1 совпадет с точкой S (рис. 23). Так как в этом случае $m = AM : MD = \dfrac{1}{\sqrt2}$ и $\alpha = -45^\circ$, то

$$\left(\Delta\vec r_T\right)_2 = \overrightarrow{T_1S} = \frac{1}{\sqrt2}\overrightarrow{DB}^{-45^\circ}.$$

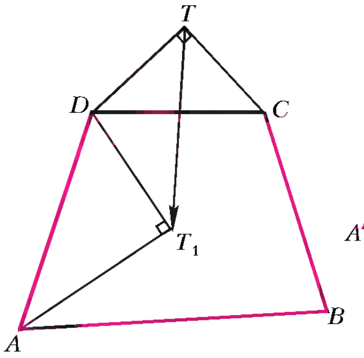


Рис. 22

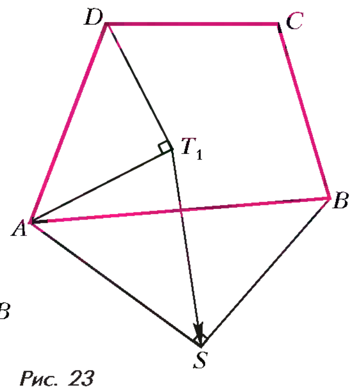


Рис. 23

Складывая перемещения $\left(\Delta\vec r_T\right)_1$ и $\left(\Delta\vec r_T\right)_2$, получим

$$\overrightarrow{TS} = \Delta\vec r_T = \left(\Delta\vec r_T\right)_1 + \left(\Delta\vec r_T\right)_2 = \overrightarrow{TT_1} + \overrightarrow{T_1S} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\left(-\overrightarrow{AC}^{45^\circ} + \overrightarrow{DB}^{-45^\circ}\right).$$

Повернем теперь вектор $\overrightarrow{TS}$ на 90°:

$$\overrightarrow{TS}^{90^\circ} = \frac{1}{\sqrt2}\left(-\overrightarrow{AC}^{135^\circ} + \overrightarrow{DB}^{45^\circ}\right).$$

Учитывая, что $-\overrightarrow{AC}^{135^\circ} = \left(-\overrightarrow{AC}^{180^\circ}\right)^{-45^\circ} = \overrightarrow{AC}^{45^\circ}$, получим

$$\overrightarrow{TS}^{90^\circ} = \frac{1}{\sqrt2}\left(\overrightarrow{AC}^{-45^\circ} + \overrightarrow{DB}^{45^\circ}\right).$$

Сравнивая это выражение с (18), приходим к равенству $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{TS}^{90^\circ}$. Из него и следует то, что требовалось доказать.

Упражнения

8. Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены подобные прямоугольные треугольники BMA, CTB, DQC, ASD с углами α при вершинах A, C и с углами β при вершинах B и D. Докажите, что отрезки MQ и ST равны и угол между ними равен 2α (2β).

9. Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники AOB, BQC, CSD, DTA. Докажите, что если вершины O и S совпадают, то совпадают вершины Q и T.

10. Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники AOB, CQB, CSD, ATD. Докажите, что если вершины O и S совпадают, то отрезок QT проходит через их общую точку и делится в ней пополам.

11. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = \sqrt3 CD$ и при этом угол между прямыми AB и CD равен 30°. На стороне AD построен равносторонний треугольник ADL, а на стороне BC – равнобедренный треугольник BKC с углом 120° при вершине C. Докажите, что точки L, D, K лежит на одной прямой и точка D является серединой отрезка KL.

12. В трапеции $ABCD$, с основаниями AB и CD, $AB = \sqrt3 CD$. На ее боковых сторонах AD, BC и диагоналях AC, BD построены как на гипотенузах подобные прямоугольные треугольники DLA, CNB, CMA, DKB с углами 30° при вершинах A, B и 60° при вершинах C, D. Докажите, что четырехугольник $KNML$ – квадрат со стороной, вдвое меньшей основания AB. Найдите углы, которые образуют с основаниями трапеции стороны квадрата.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5– 2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1831» или «Ф1838». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1836–М1838 предлагались на XXVIII Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1838, Ф1841 – Ф1845 и Ф1847 предлагались на XXXVI Всероссийской физической олимпиаде.

Задачи М1831—М1840, Ф1838—Ф1847

М1831. В наборе 20 гирек, массы которых различны. Среди любых одиннадцати из них можно выбрать две, общая масса которых равна 100 г. Докажите, что общая масса всех 20 гирек набора равна 1000 г.

В.Произволов

М1832. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C' (рис.1). Точка Q – середина $A'B'$. Докажите, что углы $B'C'C$ и $A'C'Q$ равны.

А.Заславский

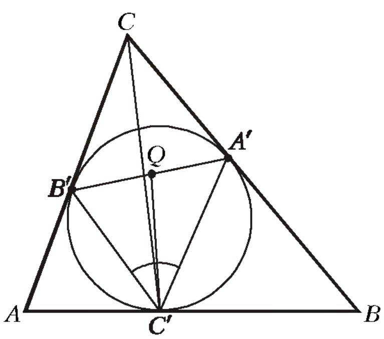


Рис.1

М1833. Фигура «танк» ходит по горизонтали или вертикали ровно на n клеток ($n > 1$), закрашивая все клетки, по которым прошла. Сделав несколько ходов на бесконечной клетчатой доске, «танк» вернулся на исходную позицию. Оказалось, что его след нигде себя не пересек. При каких n площадь, ограниченная следом «танка», может оказаться равной 2002?

А.Малеев, С.Волченков

М1834. Для действительных чисел x, y, z докажите неравенства

а) $$x^6y^6 + x^6z^6 + y^6z^6 + 3x^4y^4z^4 \geq 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right)x^3y^3z^3;$$

б) $$x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq 2\left(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3\right).$$

Ф.Шлейфер

М1835. Около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность. Через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная какой-либо стороне четырехугольника, две его противоположные стороны отсекают на ней отрезок. Докажите, что длина отсекаемого отрезка равна четверти периметра четырехугольника.

В.Произволов

М1836. Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл победит гидру, если ему удастся разрубить ее на две не связанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более чем N ударов.

Ю.Лифшиц

М1837. Докажите, что для любого натурального числа $n > 10000$ найдется такое натуральное число m, представимое в виде суммы двух квадратов, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$.

А.Голованов

М1838. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

В.Дольников, И.Богданов

М1839. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Докажите, что
$$(\cos x)^{\cos^2 x} > (\sin x)^{\sin^2 x},$$
а также
$$(\cos x)^{\cos^4 x} < (\sin x)^{\sin^4 x}.$$

В.Сендеров

М1840. В сферу вписаны несколько правильных тетраэдров так, что каждые два из них имеют общую вершину. Докажите, что все тетраэдры имеют общую вершину.

В.Произволов

Ф1838. У вертикальной стены стоит палочка AB длиной L (рис.2). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью v, жук пополз по палочке с постоянной скоростью u относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?

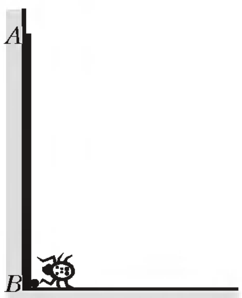


Рис.2

С.Кузьмичев

Ф1839. На гладком столе покоится гантелька, состоящая из жесткого легкого стержня длиной L и двух маленьких одинаковых шариков на концах стержня. В начальный момент гантелька ориентирована с севера на юг. На один из шариков начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$, все время направленная на восток. Найдите скорости шариков в тот момент, когда гантелька повернется на 90°. Найдите также силу натяжения стержня в этот момент. Масса каждого шарика M.

З.Рафаилов

Ф1840. Маятник состоит из длинного легкого стержня длиной L, шарнирно закрепленного за один из концов. К другому концу стержня прикреплено велосипедное колесо радиусом R, вся масса которого сосредоточена в его ободе. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси. Стержень отводят на небольшой угол от вертикали и отпускают так, что он может совершить колебания в плоскости, которая перпендикулярна оси колеса. Найдите период таких колебаний. Как изменится этот период, если в оси колеса будет большое трение, не позволяющее ему вращаться?

А.Зильберман

Ф1841. С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3$ °С при температуре на улице $t_2 = -23$ °С. Предполагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0{,}4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу тепло с улицы в комнату. Какую температуру удастся в таком случае поддерживать в помещении при прежнем расходе бензина? Движок находится вне помещения.

В.Белонучкин

Ф1842. Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последовательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16 °С выше комнатной температуры, а вторая – в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное соединение заменить последовательным? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.

В.Ефимов

Ф1843. Частица массой m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряженностью $\vec{E}$, магнитное с индукцией $\vec{B}$ и поле тяжести $\vec{g}$ (рис.3). В некоторый момент поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления всех трех полей в момент выключения.

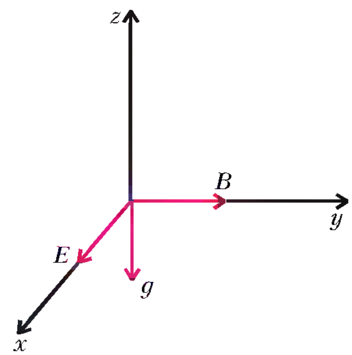


Рис.3

А.Шеронов

Ф1844. Коллекторный двигатель питается от источника постоянного напряжения U = 12 В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора равна $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого двигателя, если магнитное поле в нем создается постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и от механической нагрузки?

В.Ефимов

Ф1845. С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора, подключенного выводами к катушке индуктивностью L, мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q. Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис.4). Найдите зависимость тока через катушку от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора d, площадь поперечного сечения пластин S.

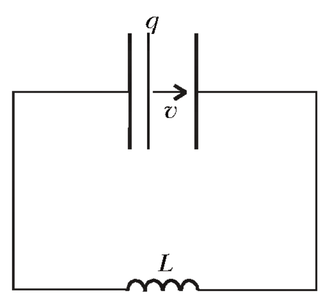


Рис.4

В.Можаев

Ф1846. Два одинаковых трансформатора содержат по две обмотки, одна из которых имеет в 2 раза больше витков, чем другая. Одну из обмоток первого трансформатора подключают к сети переменного напряжения 220 В, к другой обмотке этого трансформатора подсоединяют последовательно с резистором сопротивлением 200 Ом одну из обмоток второго трансформатора, а к выводам второй обмотки этого трансформатора подключают идеальный амперметр переменного тока. Что покажет прибор?

Р.Александров

Ф1847. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис.5). Из текста следует, что предмет и изображение одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось линзы параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).

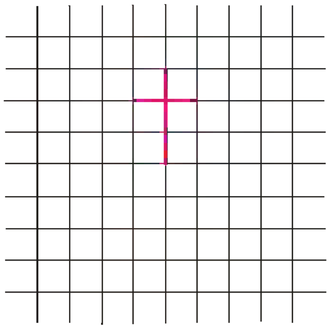


Рис.5

А.Чудновский

Решения задач М1811–М1815, Ф1823–Ф1832

М1811. *Два джентльмена одновременно начинают прогулку из пунктов А и В, чтобы завершить ее, соответственно, в пунктах В и А (см. рисунок). В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между А и В 1000 м, через каждые 100 м от аллеи АВ отходит боковая аллея длиной 100 м. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти по ней туда-обратно либо ее проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.*

Будем называть джентльменов A и B – по обозначениям концов аллеи, из которых они вышли. Гипотетическая возможность не встретиться и разминуться скрывается в наличии боковых аллей. Можно предположить, что пока джентльмен B находится где-то на боковой аллее, джентльмен A «проскакивает» ее начало по главной аллее. Зафиксируем этот предполагаемый момент времени t_0.

К моменту t_0 джентльмен A пройдет по парку $100k$ метров, k – целое число. Столько же, ввиду равенства скоростей, пройдет джентльмен B. Значит, джентльмен B в момент t_0 будет находиться либо в начале, либо в конце боковой аллеи. Если он в начале боковой аллеи, то произошла встреча в момент t_0. Если B находится в конце боковой аллеи, то это означает, что джентльмен A может переместиться из пункта A в пункт B, пройдя $100k + 100(k-1) = 100(2k-1)$ метров по парку. Но переместиться из A в B джентльмен A может, лишь пройдя по парку $100m$ метров, где m – непременно четное число.

Значит, встреча джентльменов неизбежна.

Напоследок вопрос для самоконтроля. Остается ли в силе утверждение задачи в случае $AB = 1100$ м?

В.Произволов

М1812. *Натуральные числа a, b и c таковы, что*

$$НОД\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right) = 1 .$$

Докажите, что

$$НОД(ab+c, bc+a, ca+b) = НОД(a, b, c) .$$

(*НОД – наибольший общий делитель.*)

Рассмотрим произвольное простое число p и докажем, что оно входит в $НОД(ab+c, bc+a, ca+b)$ и $НОД(a, b, c)$ в равной степени. Заметим, что если $НОД(a, b, c) \vdots p$, то степень вхождения p в оба НОДа равна наименьшей степени вхождения p в числа a, b, c (если $НОД(a, b, c) \vdots p^k$, но c не делится на p^{k+1}, то $ab + c$ делится на p^k, но не делится на p^{k+1}). Поэтому достаточно доказать, что любой простой делитель q числа $НОД(ab+c, bc+a, ca+b)$ делит $НОД(a, b, c)$. Пусть, скажем, a не делится на q, тогда, поскольку $bc + a$ не делится на q, получаем, что b не делится на q и c не делится на q. Тогда

$$(ab+c)(bc+a) - a(ab+c) - c(bc+a) = ac\left(b^2-1\right) \vdots q .$$

Стало быть, $\left(b^2-1\right) \vdots q$. Аналогично, $\left(a^2-1\right) \vdots q$ и $\left(c^2-1\right) \vdots q$ – это уже противоречие с тем, что $НОД\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right) = 1$. Значит, $НОД(ab+c, bc+a, ca+b) = НОД(a, b, c)$.

А.Голованов

М1813. *Фигура F ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса (рис.1).*

а) Разрежьте F на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте F на четыре части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трех других можно было сложить второй такой же квадрат.

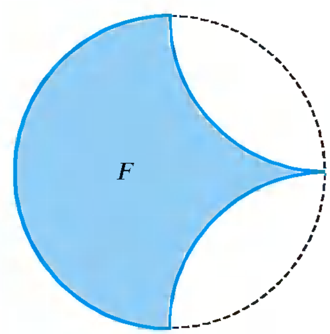


Рис.1

а) Это делается просто. На рисунке 2 показано разрезание фигуры F на части и складывание из них квадрата. Два сегмента отрезаются от F и приставляются иначе к оставшейся части – в результате получаем квадрат.

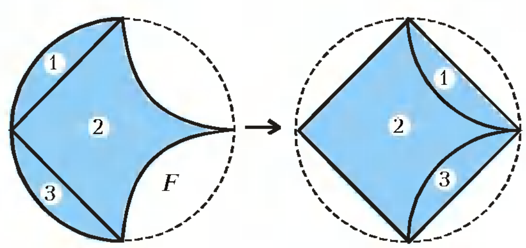


Рис.2

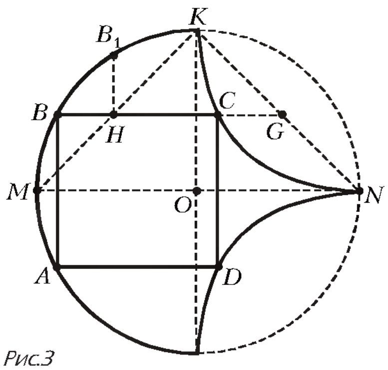


Рис.3

б) Пусть круг, содержащий фигуру F, имеет радиус $MO = = 1$ (рис.3). Впишем в F прямоугольник $ABCD$ такой, что $AB = 1$. Убедимся, что $ABCD$ – квадрат; для этого покажем, что $BC = 1$. Отрезок HG – средняя линия треугольника MKN, $HG = 1$. Далее, $\angle B_1HB = 90^\circ$, $BH = = B_1H = CG$. Значит, $BC = HG$, т.е. $BC = 1$. Таким образом, фигуру F можно представить как объединение двух частей: квадрата $ABCD$ и дополнительной части Q, составляющие элементы которой пристегнуты «точками-пуговками» A, B, C и D друг к другу.

Часть Q расположим на плоскости иначе – как показано на рисунке 4, отразив нижний и верхний ее элементы относительно AD и BC. Далее, «расстегнув» пуговки A, B, C и D, расположим элементы так, чтобы они образовали второй квадрат $ABCD$ (рис.5). На этом завершим решение задачи-головоломки.

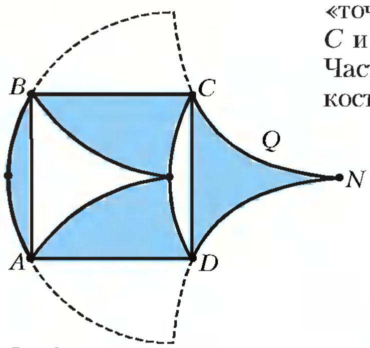


Рис.4

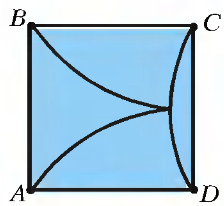


Рис.5

В.Произволов

М1814. *Пусть a, m_1, m_2 – натуральные числа, причем a взаимно просто как с m_1, так и с m_2. Обозначим через r_n остаток от деления целой части числа a^n/m_1 на m_2 ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ является периодической.*

Так как $\text{НОД}(a, m_1) = \text{НОД}(a, m_2) = 1$, то $\text{НОД}(a, m_1m_2) = 1$. Пусть n_0 – какое-нибудь натуральное число, для которого a^{n_0} при делении на m_1m_2 дает в остатке 1. (Если $\text{НОД}(a, m_1m_2) = 1$, то такое число обязательно существует. Можно, например, положить $n_0 = \varphi(m_1m_2)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера – см. статью В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №1 за 2000 год.)

Тогда $a^{n_0} = Qm_1m_2 + 1$ для некоторого целого числа Q. Теперь при любом $n \ge n_0$ имеем

$$\left[\frac{a^n}{m_1}\right] = \left[\frac{a^{n_0}a^{n-n_0}}{m_1}\right] = \left[\frac{(Qm_1m_2 + 1)a^{n-n_0}}{m_1}\right] =$$

$$= \left[a^{n-n_0}Qm_2 + \frac{a^{n-n_0}}{m_1}\right] = a^{n-n_0}Qm_2 + \left[\frac{a^{n-n_0}}{m_1}\right].$$

($[x]$ обозначает целую часть числа x).

Таким образом, остатки чисел $\left[a^n/m_1\right]$ и $\left[a^{n-n_0}/m_1\right]$ при делении на m_2 совпадают, т.е. $r_n = r_{n-n_0}$. Значит, последовательность $\{r_n\}$ имеет период длины n_0 (доказано также и то, что этот период начинается с самого начала последовательности).

Возникает вопрос о длине *наименьшего* периода последовательности $\{r_n\}$. Верно ли, что если в качестве n_0 взять *наименьшее* натуральное число такое, что a^{n_0} при делении на m_1m_2 дает в остатке 1, то n_0 и будет длиной наименьшего периода? Как показывает пример $a = 3$, $m_1 = 13$, $m_2 = 2$ (здесь $n_0 = 3$, а последовательность $\{r_n\}$ сплошь состоит из нулей), ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Однако если дополнительно предположить, например, что $m_2 \ge m_1$, то ответ будет утвердительным (читателю предлагается доказать это в качестве упражнения).

Н.Осипов

М1815. *Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.*

Инструментом решения является теорема Менелая для пространственного четырехугольника, утверждающая, что *точки X, U, Y, V, взятые на сторонах четырехугольника AB, BC, CD, DA или их продолжениях, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда* $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA} = 1$.

Для доказательства теоремы Менелая продолжим прямые XU и YV до пересечения с AC. Точки X, U, Y, V лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда все три прямые пересекаются в одной точке P либо параллельны (рис.1). Но в этом случае, применяя теорему

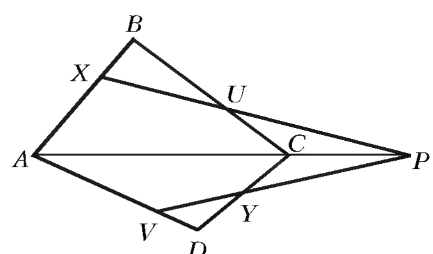


Рис.1

Менелая к треугольникам ABC и ACD, получаем $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CP}{PA} = 1$ и $\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA}\cdot\frac{AP}{PC} = 1$. Перемножая эти равенства, получим требуемое соотношение.

Пусть теперь XY – перпендикуляр к сторонам AB и CD, UV – перпендикуляр к AD и BC. При ортогональной проекции на плоскость, параллельную XY и UV, прямой угол между прямыми AB и XY остается прямым. Поэтому четырехугольник $ABCD$ проецируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, а прямые XY и UV – в параллельные его сто-

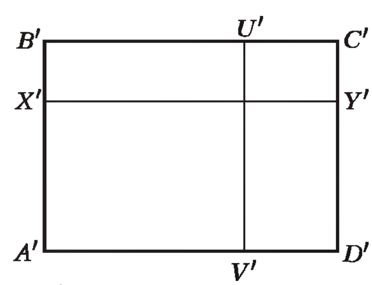


Рис.2

ронам прямые $X'Y'$ и $U'V'$ (рис.2). Очевидно, что $\frac{A'X'}{X'B'}\cdot\frac{B'U'}{U'C'}\cdot\frac{C'Y'}{Y'D'}\cdot\frac{D'V'}{V'A'}=1$. Следовательно, $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA}=1$, и по теореме Менелая точки X, Y, U, V лежат в одной плоскости. Отсюда сразу следует утверждение задачи.

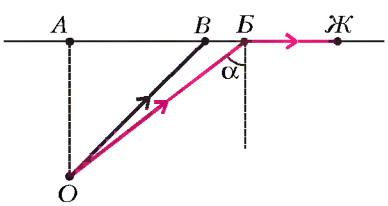
А.Заславский

Ф1823. *В поле, на расстоянии 1 км от прямой дороги, стоит и размышляет профессор Очков, большой знаток геометрической оптики. На расстоянии 2 км от ближайшей к профессору точки дороги А находится железнодорожная станция Ж. Скорость при ходьбе по полю равна 3 км/ч, по дороге – 4 км/ч. За какое минимальное время профессор может добраться до станции? А за какое время он смог бы добраться до середины отрезка АЖ?*

Профессору нужно решить – идти ли на станцию по полю вдоль прямой или дойти до какой-то точки дороги и дальше шагать по ней с большей скоростью, чем по полю. В зависимости от соотношения скоростей, при заданных положениях начальной и конечной точек пути может быть выгодным как первый, так и второй вариант.

Можно решить задачу «в лоб», обозначив буквой x расстояние от точки A до интересующей нас точки дороги, выразить через x время путешествия и взять от него производную. Минимум может достигаться в точках, где эта производная обращается в ноль, и на границах отрезка *АЖ* – их обязательно нужно проверить.

Но тонкий намек на геометрическую оптику в условии задачи подсказывает нам удобную аналогию – ведь луч света всегда выбирает «самую лучшую» траекторию!



Пустим луч света так, чтобы он после «преломления» – выхода в среду с большей скоростью – попал в точку *Ж* (см. рисунок). При этом угол «преломления» оказывается равным 90°, так что синус угла падения получается равным 0,75 (отношение скоростей – это «коэффициент преломления»). Обозначим нужную точку дороги буквой *Б*, тогда (поскольку $\operatorname{tg}\alpha=1{,}134$) *АБ* = 1134 м и *БЖ* = 866 м. При этом время движения составляет

$$t_1=\frac{ОБ}{v_1}+\frac{БЖ}{v_2}=\frac{1512\ \text{м}}{3000\ \text{м/ч}}+\frac{866\ \text{м}}{4000\ \text{м/ч}}=0{,}72\ \text{ч}.$$

А для путешествия в середину отрезка дороги (точку B) выгодно идти прямо по полю – эта точка находится «левее» точки *Б*. В этом случае

$$t_2=\frac{1414\ \text{м}}{3000\ \text{м/ч}}=0{,}47\ \text{ч}.$$

А.Очков

Ф1824. *На большой плоскости построена стена высотой 30 м. На расстоянии 30 м от стены на уровне земли расположена игрушечная пушка, а мишень установлена на расстоянии 80 м от пушки на прямой, перпендикулярной стене. При какой скорости снаряда возможно попадание?*

Можно решать эту задачу в общем виде, исследуя, например, уравнение траектории снаряда, брошенного под произвольным углом с неизвестной заранее скоростью. Но в данном случае намного проще получить решение прямо в числах.

Понятно, что вершина траектории находится на расстоянии 40 м от точки броска (по горизонтали). «Построим» еще одну стену высотой 30 м на расстоянии 80 м – 30 м = 50 м от точки броска. Ясно, что траектория, которая соответствует минимальной скорости выпущенного снаряда, почти касается верхних точек этих стен. Будем отсчитывать время от момента достижения верхней точки траектории. Тогда до второй стены снаряд долетит за время, которое в четыре раза меньше времени до падения (до стены по горизонтали 10 м, а до точки падения – 40 м). Движение по вертикали – свободное падение, поэтому за вчетверо меньшее время тело проходит по вертикали 1/16 часть полной высоты. Это означает, что высота стены составляет 15/16 от высоты траектории, и полная высота составит $H=30\ \text{м}\cdot 16/15=32\ \text{м}$. Остальное совсем просто – время полета равно удвоенному времени падения с высоты H, т.е. $t=2\sqrt{2H/g}$, и горизонтальная составляющая скорости равна

$$v_\text{г}=\frac{L}{t}=\frac{L}{2\sqrt{2H/g}}\approx 16\ \text{м/с}.$$

Вертикальная составляющая скорости при броске составляет

$$v_\text{в}=\sqrt{2gH}\approx 25\ \text{м/с}.$$

Таким образом, полная скорость снаряда при вылете равна примерно 30 м/с (считать все точнее без учета сопротивления воздуха просто не имеет смысла!).

А.Стрелков

Ф1825. *На гладком горизонтальном столе находится куб массой M = 2 кг, на его верхней грани лежит большой легкий лист бумаги, на нем – кубик массой m = 1 кг. Лист бумаги тянут с горизонтальной силой F = 15 Н. Коэффициент трения между бумагой и каждым из кубов* $\mu=0{,}7$. *Найдите ускорения каждого из тел. А какими будут ускорения при силе* F_1 *= 10 Н?*

На лист бумаги действуют силы трения со стороны нижнего и верхнего кубов, причем суммарная сила трения не превышает значения $2\mu mg=14$ Н. Это значит, что при действующей силе 15 Н лист бумаги движется с очень большим ускорением (его масса по условию мала), и оба тела проскальзывают относительно листа. Силы трения при этом максимальны, и ускорения кубов равны, соответственно,

$$a_1=\mu g=7\ \text{м/с}^2 \text{ и } a_2=\frac{\mu mg}{M}=3{,}5\ \text{м/с}^2.$$

При силе 10 Н по крайней мере один из кубов движется вместе с листом бумаги (а может быть, и оба). Если бы оба куба двигались вместе с листом бумаги (без проскальзывания), то их ускорение составило бы

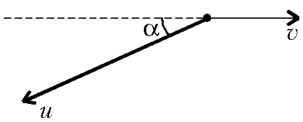
$$a_3=\frac{F}{M+m}=3{,}3\ \text{м/с}^2.$$

Видно, что это ускорение меньше найденных выше величин, силы трения не выходят за максимальные значения – движение и в самом деле происходит без проскальзывания, а ускорения тел равны найденной величине. А вот если бы взять силу побольше, скажем 12 Н, то более тяжелый нижний куб начал бы отставать, его ускорение стало бы равным $a_2 = 3{,}5\ \text{м/с}^2$, сила трения снизу составила бы 7 Н, и верхний куб двигался бы с ускорением $a_4 = \dfrac{(12-7)\ \text{Н}}{1\ \text{кг}} = 5\ \text{м/с}^2$.

Р.Александров

Ф1826. *На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом α при основании. На клине удерживают неподвижно тонкий обруч массой m. Трение между обручем и поверхностью клина велико. Обруч отпускают, и он начинает двигаться по клину без проскальзывания. Найдите скорость клина в тот момент, когда центр обруча опустится на h.*

Обозначим скорость клина v, скорость центра обруча относительно клина u (см. рисунок). Движение обруча



происходит без проскальзывания (трение по условию велико), угловая скорость вращения обруча определяется относительным движением, поэтому «добавка» к кинетической энергии за счет вращения составит $0{,}5mu^2$. Для решения воспользуемся законом сохранения импульса (по горизонтали):

$$m(u\cos\alpha - v) = Mv,$$

откуда

$$u = \frac{v(n+1)}{\cos\alpha}, \text{ где } n = \frac{M}{m},$$

и законом сохранения механической энергии (проскальзывания нет – нет и выделения тепла):

$$\frac{1}{2}m\left((u\cos\alpha - v)^2 + (u\sin\alpha)^2\right) + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(u^2 - 2uv\cos\alpha + v^2\right) + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2(1+n)\left(\frac{2(1+n)}{\cos^2\alpha} - 1\right) = mgh.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\dfrac{M}{m}\right)\left(\dfrac{2(1+M/m)}{\cos^2\alpha} - 1\right)}}.$$

Р.Обручев

Ф1827. *Молекула водяного пара при попадании в воду может отразиться, а может и «прилипнуть» – стать молекулой жидкости. Оцените вероятность «прилипания», если известно, что при +20 °С в условиях низкой влажности уровень воды в блюдце понижается за минуту примерно на 1,5 мм. Давление насыщенных паров при этой температуре составляет приблизительно 2 кПа.*

При насыщении испарение и конденсация компенсируют друг друга. Испарение легко оценить по приведенным в условии данным. С единицы площади за минуту испаряется масса воды

$$m = 1\cdot 0{,}0015\cdot 1000\ \text{кг/мин} = 1{,}5\ \text{кг/мин}.$$

Это дает число молекул

$$N_{\text{исп}} = N_{\text{А}}\frac{m}{\text{M}} = 6\cdot 10^{23}\ \text{1/моль}\cdot\frac{1{,}5\ \text{кг/мин}}{0{,}018\ \text{кг/моль}} =$$

$$= 5\cdot 10^{25}\ \text{1/мин}.$$

Посчитаем теперь число ударов молекул насыщенного пара о единицу площади поверхности воды за минуту:

$$N = \frac{1}{2}nv\tau = \frac{1}{2}\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{RT}{\text{M}}}\cdot 1\cdot 60 \approx 5\cdot 10^{27}\ \text{1/мин}.$$

Видно, что для динамического равновесия нужно, чтобы «прилипала» в среднем одна из ста ударяющихся молекул. Таким образом, вероятность «прилипания» получается порядка 0,01.

А.Паров

Ф1828. *Моль гелия расширяется при неизменной температуре T_0 = 300 К в заданных пределах, получая при этом от внешних тел количество теплоты Q = 20 кДж. Оцените работу газа при расширении в тех же пределах, но без подвода тепла извне.*

Внутренняя энергия моля гелия при данной температуре составляет $U = 1{,}5RT \approx 3{,}7$ кДж, что намного меньше количества теплоты, подведенного в процессе расширения. Это означает, что объем газа при расширении увеличился во много раз (оценку сделать легко, если знать формулу для расчета работы в изотермическом процессе – ведь при таком процессе все подведенное тепло идет на работу по расширению газа). Тогда легко сообразить, что без подвода тепла газ сможет совершить работу, практически равную «запасу» энергии: $A = U_{\text{нач}} - U_{\text{кон}} \approx U_{\text{нач}} = U \approx 3{,}7$ кДж.

А.Диабатов

Ф1829. *Простейший прибор для измерения сопротивления (омметр) состоит из последовательно соединенных батарейки, миллиамперметра и реостата (его часто называют переменным резистором или потенциометром). Измеряемый резистор подключают к выводам этой цепи. Перед началом измерений прибор настраивают – замыкают накоротко выводы цепи (это соответствует нулевому сопротивлению измеряемого резистора) и реостатом устанавливают стрелку миллиамперметра на конец шкалы. В нашем случае настроенный прибор при сопротивлении резистора R_1 = 500 Ом отклоняется на 3/4 шкалы, а при сопротивлении R_2 = 1500 Ом – на 1/2 шкалы. В каком месте шкалы у нашего омметра должна стоять отметка 1 кОм? А 300 Ом? Какое сопротивление еще можно измерить нашим прибором со сколь-нибудь разумной точностью, если суммарная погрешность измерений тока лежит в пределах ±2 деления шкалы (всего на шкале миллиамперметра 100 одинаковых делений)?*

Обозначим напряжение батарейки U, ток полного отклонения прибора I, сопротивление реостата r. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\frac{U}{r+1500}=\frac{1}{2}I\ ,\ \frac{U}{r+500}=\frac{3}{4}I\ ,\ \frac{U}{r+R_x}=xI\ .$$

Отсюда легко найти $U/I=r=1500$ Ом и выразить зависимость величины x (доля шкалы, на которую отклоняется стрелка при сопротивлении R_x) от величины R_x:

$$x=\frac{1500}{1500+R_x}\,.$$

При сопротивлении 1000 Ом стрелка отклонится на 3/5 шкалы, при 300 Ом – на 5/6 шкалы.

Измерить можно сопротивление, при котором стрелка отклонится на 6 – 20 делений шкалы (в зависимости от того, что вы считаете разумной точностью). Это соответствует значениям x от 0,06 до 0,2 и сопротивлениям измеряемых резисторов в диапазоне от 20 кОм (примерно) до 6 кОм.

А.Простов

Ф1830. *Для определения емкости C конденсатора большой емкости применяется следующий метод. Конденсатор заряжают до напряжения батарейки, а затем разряжают его несколько раз при помощи конденсатора известной емкости C_0 = 10 мкФ, который каждый раз присоединяют к выводам батарейки, а затем подключают параллельно выводам конденсатора емкостью C в противоположной полярности – «плюсом» к «минусу». Так повторяют определенное число раз, а затем проверяют остаточный заряд конденсатора емкостью C, подключая к нему микроамперметр. После 8 повторов максимальное отклонение стрелки составило 10 делений. В следующем опыте после 9 повторов стрелка отклонилась на 20 делений в другую сторону. Определите по этим данным емкость C.*

Обозначим заряд конденсатора емкостью C после нескольких циклов переключения через Q. Тогда после очередного подключения маленького конденсатора с зарядом пластин q получится полный заряд $Q - q$ и заряд конденсатора емкостью C станет равным

$$\frac{(Q-q)C}{C+C_0}=(Q-q)a\text{ , где }a=\frac{C}{C+C_0}\,.$$

Теперь можно записать ряд значений заряда конденсатора начиная с Q_0:

$$Q_0\,,\ Q_0a-aq\,,\ Q_0a^2-q\left(a^2+a\right),$$

$$Q_0a^3-q\left(a^3+a^2+a\right),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ Q_0a^n-q\left(a^n+a^{n-1}+\ldots+a\right).$$

Выражение в последних скобках легко преобразовать, дополнив до бесконечно убывающей геометрической прогрессии, и заменить на $\left(a-a^{n+1}\right)/(1-a)$. Пусть после n циклов заряд большого конденсатора окажется в точности нулевым, тогда можно записать

$$Q_0a^n=q\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\,.$$

Учтем, что $Q_0=CU$ и $q=C_0U$, и после простых преобразований получим

$$a=(0,5)^{1/n}\,.$$

Из этого выражения можно вычислить отношение

$$\frac{C}{C_0}=\frac{a}{1-a}\,.$$

Для приведенных в задаче чисел n = 8 и n = 9 получим отношения емкостей 11,05 и 12,5. Истинное значение ближе к 11,05 – простая пропорция дает для отношения емкостей конденсаторов $C/C_0=11{,}5$ и емкость C = 115 мкФ. При расчетах мы пренебрегли саморазрядом конденсаторов в процессе измерений (для обычных электролитических конденсаторов таких емкостей саморазряд может оказаться очень существенным), более точное вычисление неизвестной емкости при этом неоправданно.

З.Рафаилов

Ф1831. *Источник переменного напряжения $U=U_0\cos\omega t$ подключен к последовательно соединенным конденсатору емкостью C = 1 мкФ и катушке индуктивностью L = 1 Гн. Вольтметр, присоединенный к источнику, показывает напряжение U_1 = 1В, а если подключить его к катушке, он покажет U_2 = = 100 В. Какой может быть частота источника ω? Элементы цепи считайте при расчете идеальными. А если катушка намотана проводом, имеющим сопротивление, то при каком его сопротивлении описанное выше возможно?*

Из условия задачи ясно, что частота источника близка к собственной частоте контура $\omega_0=1/\sqrt{LC}=1000\ \text{с}^{-1}$, и мы наблюдаем резонанс. Если частота чуть ниже резонансной, то напряжение конденсатора больше, чем у катушки, и при напряжении катушки 100 В оно составляет 101 В (при одинаковых токах напряжения противофазны, а их «сумма» дает напряжение источника). В этом случае

$$U_L=I\omega_1L=100\ \text{В}\,,\ U_C=\frac{I}{\omega_1C}=101\ \text{В}\,,$$

откуда

$$\omega_1=\omega_0\sqrt{\frac{100}{101}}=995\ \ 1/\text{с}\,.$$

Если частота выше резонансной, то напряжение конденсатора меньше, оно равно 99 В, и в этом случае для частоты источника получим

$$\omega_2=\omega_0\sqrt{\frac{100}{99}}=1005\ \ 1/\text{с}\,.$$

Если в цепи есть сопротивление, то при резонансе ток определяется этим активным сопротивлением. Для получения напряжения на катушке $U_L=100$ В этот ток должен составить $I_0=U_L/(\omega_0L)=0{,}1$ А. Для этого сопротивление не должно превышать величины

$$r=\frac{U_1}{I_0}=10\ \text{Ом}\,.$$

Если сопротивление больше, то нужный ток не получается даже на резонансной частоте.

А.Зильберман

Ф1832. *Плоская монохроматическая волна с длиной λ = 0,55 мкм падает перпендикулярно на очень*

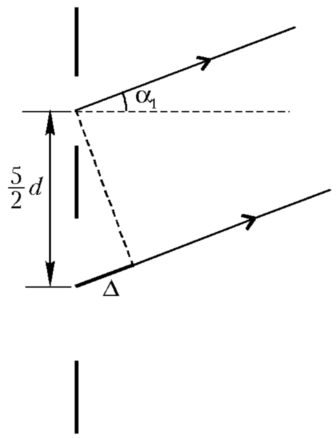


Рис.1

тонкий плоский непрозрачный лист. В листе прорезаны две длинные параллельные щели шириной 0,5 мм и 1 мм, а расстояние между ближайшими краями щелей составляет 0,5 мм. На расстоянии 10 м от листа параллельно ему расположен экран для наблюдения интерференции. На каком расстоянии от главного максимума располагается ближайшая серая полоса? Рассчитайте то же для ближайшей черной полосы.

Серая полоса получится при вычитании волн от широкой и узкой щелей (рис.1). Разность хода Δ этих волн равна $(5/2)d\sin\alpha_1$, где d = 0,5 мм – ширина более узкой щели. Тогда

$$\frac{5}{2}d\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{2}, \text{ откуда } \sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{5d}.$$

Расстояние от середины центральной белой полосы (главного максимума) до середины ближайшей серой полосы составляет

$$x_1 = L\operatorname{tg}\alpha_1 \approx L\sin\alpha_1 = \frac{L\lambda}{5\alpha} \approx 2\text{мм},$$

где L = 10 м – расстояние от щелей до экрана.

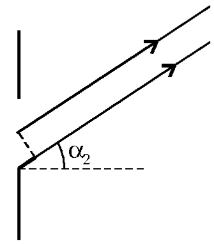


Рис.2

Ближайшая черная полоса получится в направлении, куда не излучает щель шириной d (рис.2):

$$\frac{d}{2}\sin\alpha_2 = \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$x_2 = L\operatorname{tg}\alpha_2 \approx L\sin\alpha_2 = \frac{L\lambda}{d} \approx 1 \text{ см}.$$

А.Волнов

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2001 года

Первое место заняли

по математике

Нестерук Владимир – Украина, Киев, лицей «Научная смена»;

по физике

Жуков Евгений – Украина, Киев, естественно-научный лицей 145.

Второе место заняли

по математике

Старолетов Алексей – Барнаул, гимназия 42;

по физике

Гамаюн Александр – Украина, Киев, естественно-научный лицей 145,
Лунев Антон – Радужный Владимирской обл., школа 2.

Третье место заняли

по математике

Сушко Денис – Украина, Донецк, лицей «Интеллект»;

по физике

Александрова Катя – Псков, школа 27.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Добровольская Галина – Украина, Киев, лицей 171 «Лидер»,
Сериков Денис – Унеча Брянской обл., школа 3,
Силаев Александр – Нижний Новгород, школа 40,
Скрябин Олег – Украина, Донецк, УВК 1,
Дятлов Семен – Новосибирск, гимназия 3,
Байденко Борис – Украина, Киев, лицей 171 «Лидер»;

по физике

Тимофеев Андрей – Салават, гимназия 1,
Передерей Евгений – Морозовск Ростовской обл., школа 4,
Коротеев Петр – Тула, МОУ-гимназия 1,
Сериков Денис – Унеча Брянской обл., школа 3,
Бубочкин Кирилл – Озерск Челябинской обл., школа 41.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2002 года.

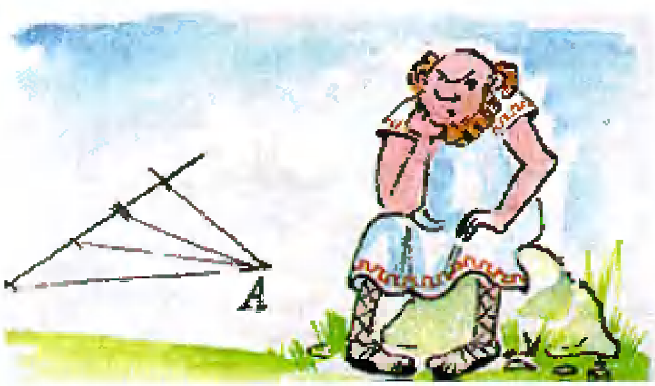
Задачи

1. Один математик сказал: «Я родился в двадцатом столетии до начала Великой Отечественной войны. Год моего рождения – простое число, все цифры которого отличны от нуля. Произведение же цифр этого числа – точный квадрат». В каком году родился математик?

А.Зайчик

2. Дана точка *A* и прямая *l*, не проходящая через точку *A*. На прямой отметили четыре точки и соединили каждую с точкой *A*. Могут ли все 6 треугольников, которые возникнут на таком чертеже, оказаться равнобедренными?

Д.Калинин



3. Дети гуляют во дворе детского сада. Тех из них, у кого на ногах надето поровну носков, в 5 раз меньше, чем тех, у кого не поровну (каждый ребенок мог надеть как свои собственные носки, так и произвольное количество носков своих соседей). Воспитательница велела детям переодеться, и каждый ребенок снял с одной своей ноги носок и надел его на другую ногу. Теперь тех, у кого носков на ногах поровну, стало в 2 раза меньше, чем тех, у кого не поровну. Могло ли быть

так, что в начале прогулки более чем у половины детей на одной ноге было ровно на один носок меньше, чем на другой?

К.Кохась

4. Может ли число $\overline{xxyy}$, где x и y – некоторые цифры, быть полным квадратом? А число $\overline{xxxyyy}$?

В.Сендеров

5. Известно, что каждый угол выпуклого двенадцатиугольника кратен 30°. Докажите, что все углы этого двенадцатиугольника равны.

В.Произволов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

6. 8 одинаковых по внешнему виду монет расположены по кругу. Известно, что 3 из них фальшивые (более тяжелые по весу). Все фальшивые монеты весят

одинаково, все настоящие тоже. Можно ли определить все три фальшивые монеты, произведя лишь два взвешивания на чашечных весах без гирь?

И.Николаева

7. В темном чулане семь гномов хранят колпаки разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил 10 колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут

проснулись остальные гномы, и второй гном попросил 9 колпаков одного цвета, третий – 8 колпаков одного цвета, и так далее, вплоть до последнего седьмого гнома, который попросил 4 колпака одного цвета. Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан за колпаками. Какое наибольшее число цветов могли иметь колпаки, хранящиеся в чулане?

А.Малеев

8. Длина каждой стороны десятиугольника равна 1. Девять его сторон касаются некоторой окружности. Докажите, что десятая сторона тоже касается этой окружности.

В.Произволов

9. Таблица, состоящая из m строк и n столбцов, заполнена различными натуральными числами от 1 до mn ($m \geq n \geq 2$). Назовем две клетки, имеющие общую сторону или вершину, близкими. Для каждой пары близких клеток выпишем на отдельный лист абсолютную величину разности между числами, стоящими в этих клетках. Среди выписанных чисел выберем наибольшее. Докажите, что наименьшее возможное значение этого числа равно $n + 1$.

И.Акулич

10. Существует ли такое натуральное число n, большее единицы, что n^2 равно сумме n квадратов последовательных целых чисел?

В.Сендеров, А.Спивак

Целочисленные треугольники

Э.БАЛАШ

В данной заметке целочисленными называются такие треугольники, длины сторон которых выражаются натуральными числами.

Хорошо изучены целочисленные прямоугольные треугольники. Длины их сторон a, b, c представляются так называемыми *пифагоровыми* тройками чисел (a, b, c):

$$a = l\left(m^2 - n^2\right);$$
$$b = 2lm;$$
$$c = l\left(m^2 + n^2\right).$$

Здесь l, m, n – произвольные натуральные числа такие, что $m > n$. Выражения для a и b можно переставлять местами.

Нас будут интересовать целочисленные треугольники с длинами сторон a, b, c, содержащие углы 60 или 120 градусов. Условимся всегда считать сторону c противолежащей углу, кратному 60°.

Целочисленные треугольники с углом 120°

Если треугольник имеет угол 120°, то его стороны a, b, c связаны равенством

$$a^2 + ab + b^2 = c^2. \qquad (1)$$

Это следует из *теоремы косинусов,* согласно которой для произвольного треугольника с длинами сторон a, b, c и углом α, противолежащим стороне c, выполняется равенство $a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 = c^2$.

Наоборот, если стороны треугольника a, b, c связаны соотношением (1), то сторона c лежит против угла 120°. Действительно, в этом случае косинус угла α, противолежащего стороне c, согласно (1) и теореме косинусов равняется $-\frac{1}{2}$, что возможно лишь в том случае, если $\alpha = 120^\circ$.

Равенство (1) позволяет «забыть» о геометрии: задачу поиска целочисленных треугольников с углом 120° мы свели к задаче решения уравнения (1) в натуральных числах. На поиске решений в натуральных числах уравнения (1) мы сейчас и сосредоточим свои усилия.

Прежде всего заметим, что если какая-то тройка натуральных чисел (a, b, c) удовлетворяет уравнению (1), причем у чисел a и b имеется общий делитель d, то на d будет делиться также и число c. Это наблюдение позволяет ограничиться поиском лишь таких решений (a, b, c), у которых числа a и b взаимно просты. Все другие решения будут отличаться от найденных натуральным множителем. В дальнейшем мы будем предполагать числа a и b взаимно простыми, не оговаривая это особо.

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Пусть натуральные числа a, b, c связаны соотношением (1), тогда c не делится на 3, а из двух чисел $c + a - b$ и $c + b - a$ одно делится на 3, а другое не делится.

Действительно, из равенства (1) следует, что $c^2 - \left(a^2 - b^2\right) = 3ab$. Если c делится на 3, то $a - b$ делится на 3. Но квадраты чисел, делящихся на 3, делятся на 9. Левая часть выписанного равенства делится на 9, значит, и $3ab$ тоже делится на 9. Тогда ab делится на 3, т.е. одно из чисел a или b делится на 3. Но тогда и другое из этих чисел делится на 3, поскольку $a - b$ делится на 3. А это невозможно, поскольку числа a и b взаимно просты. Полученное противоречие говорит о том, что исходное допущение неверно. Итак, число c не делится на 3. Далее, из равенства $(c + a - b)(c + b - a) = 3ab$ следует, что одно из чисел $c + a - b$ или $c + b - a$ делится на 3. Оба они не могут делиться на 3, поскольку в противном случае их сумма делилась бы на 3, что невозможно.

Теорема. *Пусть числа a, b, c связаны соотношением (1). Тогда найдутся натуральные взаимно простые числа n и m (n > m) такие, что n − m не делится на 3 и*

$$a = n^2 - m^2,\ b = m^2 + 2mn,\ c = m^2 + mn + n^2 \quad (2).$$

Доказательство. Будем полагать, что $c + a - b$ не делится на 3. Этого всегда можно добиться выбором обозначений, поскольку в выражение $a^2 + ab + b^2$ переменные a и b входят симметрично. Введем вспомогательный параметр $k = \frac{b}{c+a}$. Так как a, b и c – целые числа, то k – рациональное число. Пусть $k = \frac{m}{n}$, где дробь $\frac{m}{n}$ будем предполагать несократимой. Так как $ab + b^2 = c^2 - a^2$, то $b(a+b) = (c-a)(c+a)$. Заменим везде b на $k(c+a)$: $k(c+a)(a+kc+ka) = (c-a)(c+a)$.

Так как $c + a \neq 0$, то на $c + a$ можно сократить: $ka + k^2c + k^2a = c - a$, откуда $\left(k^2 + k + 1\right)a = \left(1 - k^2\right)c$ и $\frac{a}{c} = \frac{1-k^2}{k^2+k+1}$. Прибавим к обеим частям последнего равенства по единице: $\frac{a+c}{c} = \frac{k+2}{k^2+k+1}$. Теперь умножим обе части последнего равенства на k: $\frac{k(a+c)}{c} = \frac{k^2+2k}{k^2+k+1}$. Но $k(a+c) = b$, поэтому $\frac{b}{c} = \frac{k^2+2k}{k^2+k+1}$.

Заменим везде k на $\frac{m}{n}$. После упрощений получим

$$\frac{a}{c} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + mn + n^2},\ \frac{b}{c} = \frac{m^2 + 2nm}{m^2 + mn + n^2},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + 2mn}.$$

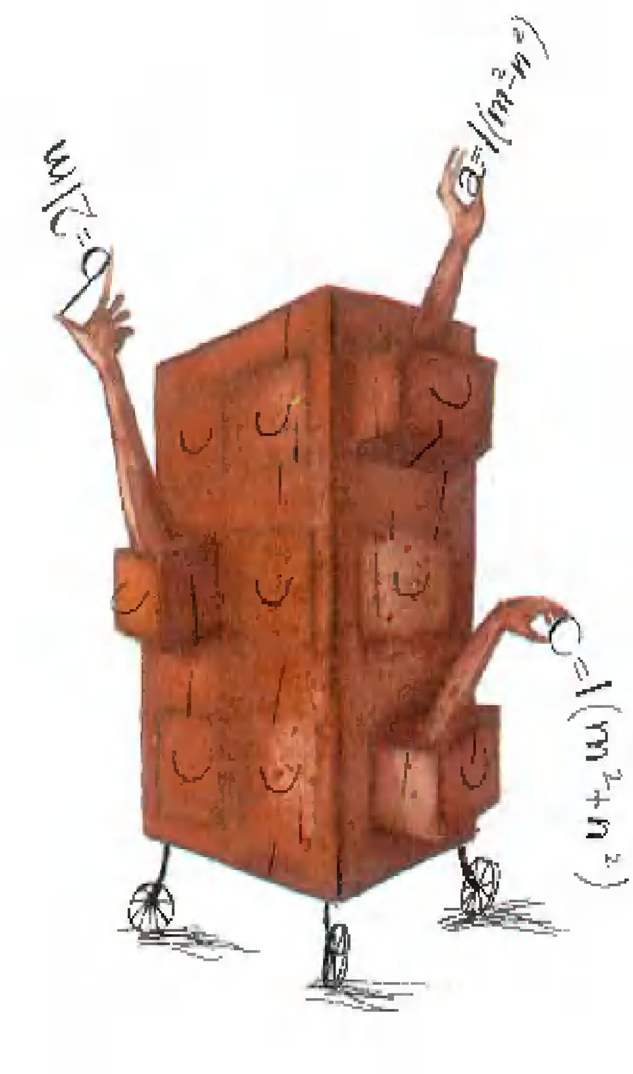
Докажем, что дробь $\dfrac{n^2-m^2}{m^2+2mn}$ несократима.

Предположим, что оба числа n^2-m^2 и $m(m+2n)$ делятся на некоторое простое число p. Рассмотрим множители второго числа. Если m делится на p, то n на p не делится в силу взаимной простоты чисел m и n. Но тогда n^2-m^2 на p не делится, чего не может быть. Следовательно, на p делится число $m+2n$, а число m не делится. В этом случае на p будет делиться

$$4\left(n(m+2n)-\left(n^2-m^2\right)\right)-(m+2n)^2=3m^2.$$

Так как m^2 не делится на p, то на p делится 3. Итак, число p может быть только тройкой: $p=3$.

В самом начале доказательства мы предположили, что $c+a-b$ не делится на 3. Поскольку $\dfrac{m}{n}=\dfrac{b}{c+a}$, то $\dfrac{m}{n-m}=\dfrac{b}{c+a-b}$; отсюда заключаем, что $n-m$ не делится на 3. Но по нашему предположению $n^2-m^2=(n-m)(n+m)$ делится на 3, поэтому на 3 делится число $n+m$, а значит, и число $m(n+m)=mn+m^2=\left(m^2+2mn\right)-mn$. Поскольку по предположению число m^2+2mn делится на 3, отсюда следует, что mn делится на 3, т.е. n делится на 3. Из делимости на 3 разности n^2-m^2 следует, что и m должно делиться на 3, что невозможно. Итак, дробь $\dfrac{n^2-m^2}{m^2+2mn}=\dfrac{a}{b}$ несократима. В силу взаимной простоты чисел a и b отсюда заключаем, что $a=n^2-m^2$, $b=m^2+2mn$ и, следовательно, $c=m^2+mn+n^2$. Теорема доказана.



Заметим, что соотношения (2) были известны уже Диофанту (ок. 250 г.).

Упражнение 1. Докажите, что для любых натуральных m и n $(n>m)$ числа a, b, c, рассчитанные по формулам (2), удовлетворяют равенству (1).

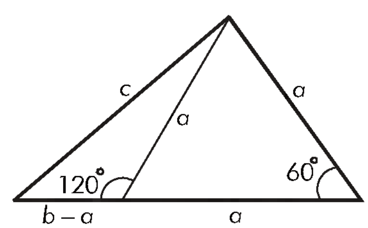
Целочисленные треугольники с углом 60°

Длины сторон a, b, c треугольников с углом 60° удовлетворяют уравнению

$$a^2-ab+b^2=c^2, \tag{3}$$

получающегося из тех же соображений, что и уравнение (1). Здесь также можно искать натуральные решения уравнения (3), развивая соответствующую теорию. Однако мы поступим более хитрым образом. На сей раз алгебре будет помогать геометрия. Оказывается, всякий треугольник с углом 60° родственен некоторому треугольнику с углом 120°! Вот как устанавливаются эти «родственные узы».

Вначале заметим, что если к углу 60° в треугольнике примыкают две равные стороны $a=b$, то в соответствии с (3) получаем $a=b=c$. Итак, уравнение (3) допускает тривиальное решение $a=b=c=n$, где n – любое натуральное число. Пусть теперь к углу 60° в треугольнике примыкают две различающиеся по длине стороны. Без ограничения общности будем полагать $b>a$. Выделив внутри данного треугольника правильный треугольник с длиной стороны a, получим дополнительный к нему треугольник с длинами сторон a, $b-a$, c и углом 120° (см. рисунок).



Про этот дополнительный треугольник («родственный» исходному) мы уже все знаем. Осталось только применить разработанную выше теорию к дополнительному треугольнику с углом 120°, а затем распространить результат на исходный треугольник.

Упражнение 2. Докажите, что если a, b, c – длины сторон целочисленного треугольника с углом 60°, причем $b>a$, то найдутся такие натуральные m и n, что

$$a=n^2-m^2,\ b=n^2+2mn,\ c=m^2+mn+n^2.$$

При этом $n-m$ не делится на 3.

Победители конкурса "Математика 6-8" 2001/02 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Бабичева Татьяна — Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Бабичев Дмитрий — Набережные Челны, гимназия 26, 5 кл.,
Жернов Павел — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Гончарук Наталья — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Цыбулин Иван — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Валюженич Александр — Ангарск, школа-гимназия 10, 7 кл.,
Кравченко Андрей — Москва, школа 1205, 7 кл.,
Плетнев Александр — Орел, школа 24, 7 кл.,
Прокопьев Илья — Чебоксары, Чувашский национальный лицей-интернат им. Г.С.Лебедева, 8 кл.,
Кадец Людмила — Харьков, СОУВК-45, 6 кл.,
Криворучко Андрей — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Тимергалиев Ирек — Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Чергинец Антон — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.

и кружки:

гимназии 127, Снежинск, руководитель *А.А.Малеев*,
«Эврика» ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий, Е.Е.Харик*,
лицея 64, Омск, руководитель *Л.А.Бачина*,
объединенный городской кружок, Иваново, руководители *Е.В.Власов, С.И.Токарев*,
Малой академии, Шелехов Иркутской обл., руководитель *А.А Кошкин*,
ФМШ 9, Пермь, руководитель *Г.А.Одинцова*,
Донецкого областного лицея «Эрудит», Донецк, руководители *Л.Л.Потемкина, В.Л.Потемкин*,
«Квантик» при подростковом клубе «Кировец», Москва, руководитель *И.А.Николаева*,
«Школа успеха», Магнитогорск, руководители *А.В.Устинов, Н.С.Никифорова, В.Л.Дронов*,
лицея-интерната и ЦДО, Чебоксары, руководители *С.А.Иванов, О.В.Ильин*,
«Эрудит» ФМШ 32, Астрахань, руководители *Г.Н.Терновая, Т.М.Сергеева, Е.С.Терентьева*,
«Многогранники» школы 119, Новосибирск, руководитель *А.Н.Глебов*,
«Квантик» лицея 3, Астрахань, руководитель *А.В.Забалуева*,
школы 6, Винница, руководитель *И.М.Кривошея*,
школы-гимназии 10, Ангарск, руководитель *О.Н.Маслова*.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих школьников:

Вайсбурда Антона — Харьков, СОУВК-45, 6 кл.,
Дворжецкого Юрия — Омск, лицей 64, 8 кл.,
Дворжецкого Влада — Омск, лицей 64, 8 кл.,
Марковцева Вадима — Сергиев Посад, 7 кл.,
Шубко Андрея — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Краснова Валерия — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Дрюка Александра — Харьков, СОУВК-45, 6 кл.,
Иваньчикова Никиты — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Запорожец Марины — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Самсонова Алексея — Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Васильева Анатолия — Чебоксары, Чувашский национальный лицей-интернат им.Г.С.Лебедева, 8 кл.,
Михайлова Андрея — Чебоксары, Чувашский национальный лицей-интернат им.Г.С.Лебедева, 8 кл.,
Хацько Кирилла — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Шкапского Глеба — Санкт-Петербург, школа 366, 7 кл.,
Зайцева Алексея — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Бервинова Дмитрия — Москва, 6 кл.,
Джулгакова Дмитрия — Харьков, школа 5, 7 кл.

и кружков:

«Юный исследователь» гимназии 17, Пермь, руководители *Г.Г.Шеремет, Н.И.Безукладникова*,
лицея 64, Омск, руководитель *О.П.Осипова*,
«Пифагор» гимназии 1, Петровск-Забайкальский, руководитель *И.О.Путинцева*.

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Поиски минимума в физических задачах» предназначена девятиклассникам, заметка «Снежинки и ледяные узоры на стекле» — десятиклассникам и «Сколько стоит запуск спутника?» — одиннадцатиклассникам.

Поиски минимума в физических задачах

С.СЕРОХВОСТОВ

Готовились как-то девятиклассники Саша, Коля и Петя к районной олимпиаде по физике. Учитель предложил им решить задачу с прошлой олимпиады. Вот ее условие:

Мальчик подошел к последнему вагону электрички в тот момент, когда электричка тронулась и начала двигаться с постоянным ускорением a. Единственная открытая дверь электрички оказалась от мальчика на расстоянии s. Какую наименьшую постоянную скорость должен развить мальчик, чтобы успеть сесть в поезд?

После уроков ребята собрались у Саши дома и стали решать.

– Эта задача решается просто, – сказал Саша. – Давайте выберем систему отсчета так, чтобы начало координат совпадало с начальным положением мальчика, а ось X была направлена вдоль платформы. Пусть мальчик бежал со скоростью v и запрыгнул в вагон через время t. Так как мальчик запрыгнул в эту дверь, то можно записать

$$vt = s + \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Отсюда мы найдем v.

– Подожди, – сказал Коля, – но у нас одно уравнение, а неизвестных величин две: v и t. Поэтому из этого уравнения мы ничего не найдем!

На это Петя возразил:

– Ну хоть что-нибудь мы найти сможем. Например, давайте выразим скорость:

$$v = \frac{s}{t} + \frac{at}{2}. \qquad (2)$$

– А еще нам надо учесть, что скорость должна быть минимально возможной, – напомнил Коля.

Старший брат Саши, который учился в десятом классе, в это время проходил мимо комнаты, в которой сидели ребята, и сказал:

– Если минимум, то нужно искать производную!

– А мы еще ее не проходили,– ответил ему Саша. – И потом, наверное, можно и без производной. Нужно просто узнать, при каком t скорость будет минимальна.

– Придумал! – вскрикнул Коля. – Помните, нам на математике говорили, что всегда справедливо соотношение

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

причем равенство будет только при $x = 1$. За x можно обозначить любую величину. Например, можно написать, что

$$v = \sqrt{\frac{as}{2}}\left(\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2s}{a}} + t\sqrt{\frac{a}{2s}}\right).$$

Теперь положим

$$x = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2s}{a}} = 1$$

и получим

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}, \quad v = \sqrt{2as}.$$

– Здорово! – сказал Петя. – Интересно, а можно ли решить другим способом? Давайте рассуждать так. Чем медленнее мальчик будет бежать, тем больше времени он затратит. А при какой-то скорости он вообще не догонит эту дверь. Выразим время из уравнения (1):

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2as}}{a}.$$

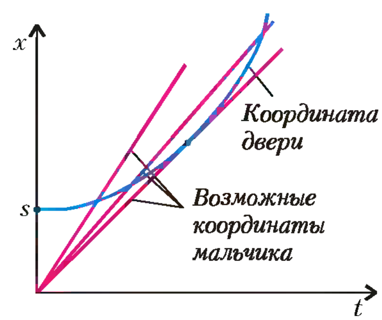
Смотрите, при $v^2 < 2as$ решения не существует, так как выражение под корнем меньше нуля! Значит, минимально возможная скорость определяется равенством

$$v^2 = 2as,$$

и ответ совпадает с ответом Коли!

Саша после небольшого раздумья сказал:

– А можно еще и третьим способом решить. Давайте построим графики зависимости координат мальчика и двери от времени. В тот момент, когда они пересекутся, мальчик и догонит дверь поезда.



Саша взял карандаш и сделал рисунок.

– Смотрите, чем меньше наклон графика координаты мальчика, тем медленнее он бежит. Наименьшая скорость, при которой он может добежать до двери, соответствует нижней прямой. А она касается графика координаты двери. Это значит, что для такого случая скорости мальчика и двери в момент запрыгивания одинаковы! Скорость двери мы легко найдем:

$$v_д = at,$$

откуда

$$t = \frac{v_д}{a}.$$

Подставим это время в уравнение (1) и получим ответ.

А Сашин брат решил проверить результаты мальчиков – он взял производную по времени от выражения (2) и приравнял ее к нулю:

$$v' = -\frac{s}{t^2} + \frac{a}{2} = 0 .$$

Отсюда он нашел время:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

и, подставив это выражение в формулу (2), получил такой же ответ, как и ребята.

– Молодец у меня брат, да и друзья его тоже молодцы! – подумал он.

На следующий день ребята гордо показали учителю свои решения. Учитель их похвалил.

– Молодцы! Вы не только получили решение, но и рассмотрели различные методы решения задач на минимум. Ты, Коля, преобразовал выражение к виду, для которого мы знаем минимум. Ты, Петя, рассмотрел область допустимых значений выражения. Ты, Саша, проанализировал решение графически и нашел точки касания графиков. Ну а твой брат, Саша, предложил способ решения с помощью производной. Он наиболее универсален, но иногда другие методы проще для вычислений. Я же могу предложить еще один способ. Давайте перейдем в систему отсчета, которая связана с мальчиком. В этой системе начальная скорость открытой двери равна $-v$, ее начальная координата s, ускорение a, и поэтому зависимость координаты открытой двери x_1 от времени имеет вид

$$x_1 = s - vt + \frac{at^2}{2} . \qquad (3)$$

Условием того, что мальчик добежит до двери, будет равенство

$$x_1 = 0 ,$$

т.е. в этот момент парабола (3) пересечет ось абсцисс на координатной плоскости (x_1, t). Но наименьшая скорость соответствует случаю, когда парабола коснется оси t. Вам остается только найти выражение для координат вершины параболы и приравнять x_1 к нулю. Но это вы должны будете проделать самостоятельно и сравнить с вашими ответами. А метод, который использовал я, можно назвать методом перехода в другую систему отсчета.

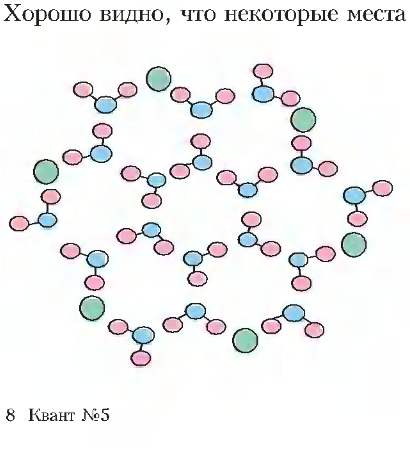
Снежинки и ледяные узоры на стекле

С.ВАРЛАМОВ

Всем вам, конечно же, приходилось разглядывать снежинки или ледяные узоры на окнах. Лед в этих случаях образуется непосредственно из пара.

При медленной конденсации водяных паров молекулы воды образуют почти плоскую структуру (кластер), которая имеет осевую симметрию шестого порядка, т.е. при повороте на 60° она переходит сам в себя. Заметим, что это только один из множества возможных способов объединения молекул воды в кристалл льда.

На схематическом рисунке атомы кислорода в молекулах изображены синим цветом, атомы водорода – красным. Хорошо видно, что некоторые места в структуре (они отмечены зеленым цветом) могут заполнить только молекулы воды, ориентированные не в плоскости рисунка, потому что к тому месту, где должен находиться отрицательно заряженный атом кислорода, уже обращены два атома водорода соседних молекул.



Заполнение этих мест молекулами при росте кристалла льда происходит с меньшей скоростью или вовсе не происходит (это связано с глубиной соответствующей потенциальной ямы для этого места).

Поперечные размеры правильной снежинки отличаются во много раз, т.е. отношение диаметра снежинки к ее толщине может достигать нескольких десятков. Это отношение характеризует скорость роста снежинки в соответствующем направлении. При росте кристалла возможны разные способы (последовательности) заполнения энергетически выгодных позиций, что обеспечивает получение кристаллов (снежинок) разной формы. Реализация конкретного способа роста – случайное событие, поэтому совершенно одинаковые по форме снежинки встречаются крайне редко. Попробуйте продолжить построение нарисованного кластера, и вы сразу увидите, как появляются возможность разветвления: достаточно увеличить радиус кластера на величину, соответствующую диаметру одной шестиугольной соты, и возникает очередное ветвление.

Давайте оценим сверху количество N возможных вариантов форм наших гипотетических снежинок-кластеров радиусом $R = 2$ мм. Размер соты имеет порядок величины $D = 6 \cdot 10^{-10}$ м. Отношение R/D равно степени двойки (ветвления):

$$R/D \approx 3{,}3 \cdot 10^6 \text{ , и } N \le 2^{3300000} \approx 10^{1000000} .$$

Конечно, это фантастически завышенная оценка. Дело в том, что реализация того или иного направления при ветвлении имеет разную вероятность. Связано это с тем, что взаимодействуют не только соседние молекулы, но и молекулы, удаленные друг от друга на значительные расстояния.

Условия конденсации пара и превращения его в лед на поверхности стекла отличаются от условий, при которых в воздухе образуются снежинки. Внутри помещения влажность воздуха обычно существенно меньше 100%, но вблизи холодной поверхности оконного стекла температура может оказаться гораздо ниже точки росы при данной концентрации молекул воды в воздухе. И на стекле появится лед.

Вид узора на поверхности стекла зависит от большого набора параметров. Перечислим некоторые из них: температура внутри помещения и температура снаружи, влажность воздуха в помещении, толщина стекла и загрязненность его поверхности, наличие и скорость воздушных потоков вблизи стекла (в частности, наличие или отсутствие щелей в оконной раме или трещин в стекле) и т.д.

Замечательные ледяные узоры часто образуются зимой на стеклах автобусов или троллейбусов. При этом слой льда может достигать нескольких миллиметров. Источником водяного пара является, разумеется, дыхание пассажиров. Сначала на поверхности стекла образуется водяная пленка толщиной в несколько диаметров молекул. Молекулы воды в ней испытывают сильное влияние молекул поверхности стекла. Хотя вода в пленке переохлаждена, но возможности для превращения воды в лед не возникает. По мере увеличения толщины пленки и уменьшения влияния молекул поверхности стекла в воде возникают центры кристаллизации. Рост кристаллов происходит во всевозможных направлениях, но самые большие кристаллы растут вдоль поверхности стекла. Скорости роста кристалла в различных направлениях тоже существенно различаются. Можно повторить, что взаимное влияние соседних и удаленных друг от друга молекул определяет вероятность заселения той или иной «вакансии» в растущем кристалле. С этим, по-видимому, связана форма (степень кривизны) растущих на поверхности стекла ледяных узоров. Когда толщина ледяного панциря на стекле становится настолько большой, что отвод тепла наружу замедляется, кристаллы льда начинают расти в перпендикулярном стеклу направлении. Стекло как бы покрывается шубой из ледяных иголок.

Скоро наступит зима, и вы сможете легко убедиться в том, что снежинки действительно имеют разнообразные симметричные красивые формы. Сама снежинка, можно сказать, представляет собой застывший случайный процесс. А если, сидя в автобусе возле покрытого морозными узорами стекла, вы сможете своим теплым дыханием «продышать» во льду окошечко для наблюдения, обратите внимание на то, как быстро это окошко вновь зарастает льдом – кристаллы льда растут быстрее, чем движется минутная стрелка ваших наручных часов.

Сколько стоит запуск спутника?

В.ЛАНГЕ

Рассмотрим спутник, обращающийся вокруг Земли по сравнительно низкой круговой орбите, во всех точках которой ускорение силы тяжести можно считать равным его значению вблизи земной поверхности, т.е. $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$. Учитывая, что центростремительное ускорение спутнику сообщает сила притяжения к Земле:

$$\frac{mv^2}{R} = mg,$$

где m – масса спутника, v – его скорость, R – радиус Земли, находим кинетическую энергию спутника:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{2}.$$

Для оценки потенциальной энергии спутника, движущегося по низкой орбите, используем приближение

$$E_p = mgH,$$

где высота орбиты $H \ll R$.

Сравнивая два последних выражения, мы видим, что потенциальная энергия спутника на низкой орбите намного меньше его кинетической энергии, которую, таким образом, можно считать практически равной полной энергии спутника E. Найдем ее, положив m = 100 кг и $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м:

$$E = 0{,}5 \cdot 100\ \text{кг} \cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{м} = 3{,}1 \cdot 10^9\ \text{Дж} = 870\ \text{кВт} \cdot \text{ч}.$$

при тарифе, например, 56 копеек за 1 киловатт-час запуск спутника должен, казалось бы, стоить всего около 480 рублей! Почему же на самом деле затраты на осуществление космических программ соизмеримы с национальными бюджетами небольших стран?

Разгадка парадокса состоит в том, что полученное нами значение энергии, 870 кВт · ч, *необходимо, но совершенно недостаточно* для запуска спутника массой 100 кг на околоземную орбиту. Поскольку ракета как тепловая машина обладает крайне низким коэффициентом полезного действия, фактические затраты энергии оказываются во много-много раз больше. Дело в том, что наряду с полезным грузом приходится поднимать также горючее, необходимое для непрерывной работы двигателей. Правда, ракета «худеет» очень быстро, но для сообщения ей желательной скорости нужно сжечь колоссальные количества топлива, что сильно снижает КПД.

Для вывода формулы, связывающей массу и скорость ракеты, примем сначала, что топливо сгорает отдельными порциями массой $\Delta M = M/N$, где M – масса ракеты перед выбросом из нее порции ΔM, а N – достаточно большое число. После сгорания первой порции масса ракеты станет равной

$$M_1 = M_0 - \frac{M_0}{N} = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right).$$

После сгорания второй порции масса вновь уменьшится на $(1/N)$-ю часть, но уже от M_1, и станет равной

$$M_2 = M_1\left(1 - \frac{1}{N}\right) = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2.$$

Рассуждая таким же образом далее, находим массу ракеты после сгорания n-й порции топлива:

$$M_n = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь, как меняется при этом скорость ракеты. При скорости истечения продуктов горения, равной u, масса ΔM уносит импульс $\Delta p = u\Delta M$. В соответствии с законом сохранения импульса такой же по величине, но противоположно направленный импульс получит ракета, в результате чего ее скорость увеличится на $\Delta p/(M - \Delta M) = (u\Delta M)/(M - \Delta M)$. Таким образом, если вначале ракета покоилась, то после сгорания первой порции массой $\Delta M_1 = M_0/N$, имевшей импульс $\Delta p_1 = (M_0 u)/N$, скорость ракеты станет равной

$$v_1 = \frac{\Delta p_1}{M_1} = \frac{u}{N-1}.$$

После сгорания второй порции топлива массой $\Delta M_2 = M_1/N$, унесшей импульс $\Delta p_2 = (M_1 u)/N$, скорость ракеты возрастет на $\Delta p_2/(M_1 - M_1/N)$ и составит

$$v_2 = v_1 + \frac{u}{N-1} = \frac{2u}{N-1}.$$

Продолжая рассуждения далее, получим скорость ракеты после сгорания n-й порции:

$$v_n = \frac{nu}{N-1}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем массу ракеты, достигшей скорости v:

$$M = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{v(N-1)/u}$$

(индекс n здесь и далее опущен, поскольку надобности в нем больше нет).

На самом деле топливо в ракете сгорает не отдельными порциями, а непрерывно. Для перехода к формуле, более правильно описывающей реальный случай, нужно считать N чрезвычайно большим числом. В таком случае единицей в показателе степени последнего выражения можно пренебречь, после чего оно приобретает вид

$$M = M_0\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{vN/u} = M_0\left(\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N}\right)^{v/u},$$

или при неограниченном возрастании N —

$$M = M_0 e^{-v/u}.$$

Эта формула была выведена К.Э.Циолковским и носит его имя. Из нее хорошо видно, что ракета может достичь большой скорости, но при этом оставшаяся масса окажется много меньше первоначальной.

Пользуясь формулой Циолковского, можно оценить, сколько горючего нужно сжечь, чтобы сообщить ракете необходимую скорость. Однако для этого следует знать относительную скорость истечения газов из сопла ракеты. Чтобы найти ее, приравняем кинетическую энергию небольшой массы Δm газа, вылетевшей из ракеты за малый интервал времени, той химической энергии, которой обладала эта масса до того, как она сгорела. Обозначив теплоту сгорания (теплотворную способность) топлива через q, получим равенство

$$\frac{\Delta m u^2}{2} = \Delta m q,$$

откуда

$$u = \sqrt{2q}.$$

Теплота сгорания смеси керосина с азотной кислотой, иногда используемой в ракетной технике, составляет приблизительно 6,3 МДж/кг, и скорость истечения, следовательно, не может превысить

$$\sqrt{2 \cdot 6{,}3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} = 3{,}55 \text{ км/с}.$$

Одна из самых больших возможных скоростей истечения достигается при использовании реакции горения металлического бериллия в атмосфере кислорода:

$$\text{Be} + 0{,}5\text{O}_2 = \text{BeO} + 0{,}612 \text{ Мдж}.$$

Число мегаджоулей справа показывает, какая энергия выделяется при взаимодействии одного моля бериллия (9 г) с половиной моля кислорода (16 г). Стало быть, теплота сгорания в этом случае равна 0,612 МДж/0,025 кг = = 24,5 МДж/кг, а наибольшая скорость истечения газов составляет

$$\sqrt{2 \cdot 24{,}5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} = 7 \text{ км/с}.$$

Однако в дальнейших расчетах мы примем скорость истечения равной всего 2,5 км/с, поскольку, во-первых, такие энергетически выгодные реакции, как окисление бериллия, использовать невозможно из-за высокой токсичности и самого бериллия и его соединений, а во-вторых, фактическая скорость истечения всегда оказывается меньше максимальной.

Теперь по формуле Циолковского находим, что при достижении, например, первой космической скорости (7,9 км/с) конечная масса ракеты окажется равной

$$M = M_0 e^{-7{,}9/2{,}5} = \frac{M_0}{e^{3{,}6}} = \frac{M_0}{37}.$$

Иначе говоря, масса горючего должна составлять 36/37 = = 97,5% от стартовой массы ракеты. Естественно, что на долю действительно полезного груза (экипаж, приборы и т.п.) остается совсем немного. Вот почему для уменьшения бесполезной массы, которую пришлось бы разгонять до большой конечной скорости, ракеты (по идее, впервые выдвинутой также Циолковским) делают многоступенчатыми, причем нижние ступени сбрасываются, когда в них кончается топливо.

Для окончательной оценки затрат на запуск ракеты введем коэффициент полезного действия, определив его как отношение кинетической энергии массы ракеты, оставшейся к моменту достижения нужной скорости, к химической энергии сгоревшего топлива:

$$\eta = \frac{Mv^2/2}{(M_0 - M)q} = \frac{v^2}{2(M_0/M - 1)q}.$$

Пользуясь формулой Циолковского и выражением для максимальной скорости истечения газов, получим, обозначив отношение v/u через k, следующее соотношение:

$$\eta = \frac{v^2}{u^2\left(e^{v/u} - 1\right)} = \frac{k^2}{e^k - 1}.$$

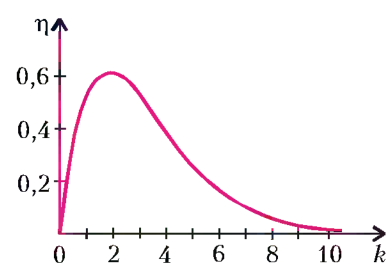


График зависимости η от k показан на рисунке. Из него хорошо видно, что при скорости ракеты, заметно превышающей скорость истечения газов, коэффициент полезного действия становится очень малым. Например, при $k = 10$ коэффициент составляет 0,45%. Это уже малая величина, но в действительности дело обстоит еще во много раз хуже.

Так как внутреннее строение тел выведывает главным образом химия, то без нее труден, даже невозможен доступ к их глубинам и тем самым к раскрытию истинной причины электричества.

Михаил Ломоносов

...мои старые и новые открытия так называемого гальванизма... проливают новый свет на теорию электричества; открывают новые пути для химических исследований.

Алессандро Вольта

Химическая сила... прямо пропорциональна абсолютному количеству прошедшего электричества.

Майкл Фарадей

Химия испытывает на себе влияние физики, пожалуй, сильней, чем любая другая наука.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакома вам электрохимия

Нет, мы вовсе не изменяем физической направленности нашего «Калейдоскопа». Напротив, стремимся показать, как далеко простирает и физика «руки свои в дела человеческие», в том числе и в химию. Еще важнее подчеркнуть, насколько плодотворен для развития наук бывает их союз, а порой и тесное переплетение, к скольким полезным свершениям он приводит. И одним из лучших примеров может послужить становление электрохимии – области, где иногда невозможно отделить физику от химии. Вспомните, например, на каких уроках вы изучаете в школе электролиз.

Впечатляет даже конспективное перечисление практических достижений электрохимии за ее более чем двухсотлетнюю историю.

Это создание постоянных батарей, аккумуляторов и различных разновидностей гальванических элементов, используемых теперь во всех отраслях техники и в быту. Если бы удалось одновременно включить все те миллиарды химических источников тока, что изготовлены сегодня на Земле, их мощность оказалась бы сравнимой с мощностью всех электростанций мира.

Это получение и очистка цветных металлов методом электролиза, внедрение гальванопластики и гальваностегии, решение проблемы опреснения воды и применение электродиализа для синтеза новых веществ, мониторинг окружающей среды с помощью химических сенсоров и имплантация электрокардиостимуляторов...

Но как бы ни были важны приложения электрохимии, нельзя забывать о той огромной теоретической роли, которую сыграли ее представления в развитии учения об электричестве и строении вещества. На это и хотим обратить ваше внимание при сегодняшнем кратком экскурсе в электрохимию.

Вопросы и задачи

1. Присутствуют ли в электролитах свободные электроны?

2. Всегда ли металл при погружении в электролит заряжается отрицательно?

3. Почему вокруг электролита, например раствора поваренной соли, нет электрического поля, хотя внутри него имеются заряженные частицы – ионы?

4. К электродам, погруженным в слабый раствор поваренной соли, подвели постоянное напряжение. Как будет меняться сила тока, проходящего через раствор, если в него постепенно подсыпать соль?

5. Почему безводная серная кислота может храниться даже в железной посуде, а разведенная – только в стеклянной?

6. Две одинаковые электролитические ванны соединены последовательно. В первой из них находится раствор CuCl, во второй – $CuCl_2$. В какой из ванн на катоде выделяется больше меди?

7. До каких пор будет продолжаться процесс электролиза медного купороса, если взяты угольные электроды; медные электроды?

8. Полный ток в электролите складывается из тока положительных ионов и тока отрицательных ионов, движущихся в противоположных направлениях. Почему количество вещества, выделяющегося на катоде, рассчитывается по полному току, а не по току лишь положительных ионов?

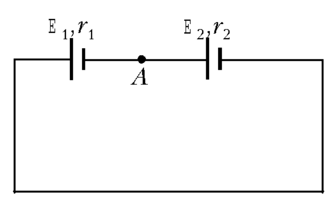
9. В каком случае опаснее браться за электрические провода – когда руки сухие или когда мокрые?

10. Для чего в гальванотехнике применяют реверсирование, т.е. изменение направления тока?

11. Через аккумулятор течет ток. Сравните разность потенциалов на клеммах аккумулятора с его ЭДС.

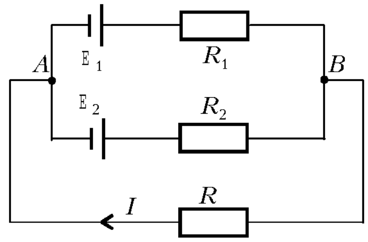
12. При измерении ЭДС старой батарейки для карманного фонарика вольтметр показал значение, близкое к номинальному, но лампочка от этой батарейки не загорелась. Почему?

13. Изобразите графически примерное распределение потенциала вдоль замкнутой цепи, изображенной на рисунке, если $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ и $r_1 < r_2$.



14. Чтобы увеличить ток, протекавший в цепи одного аккумулятора, к нему присоединили второй. Однако как при последовательном, так и при параллельном соединении этих аккумуляторов получался меньший ток. В каком случае это возможно?

15. В цепи, показанной на рисунке, увеличили сопротивление



R_1, из-за чего ток I также увеличился. Когда это возможно?

16. Трамвайная линия питается постоянным током, причем воздушный провод присоединен к положительному полюсу генератора, а рельсы – к отрицательному. Почему так, а не наоборот?

17. Почему гальванический элемент с небольшой – порядка нескольких вольт – ЭДС может дать значительный ток, а электростатическая машина, ЭДС которой достигает десятков тысяч вольт, дает ток ничтожной силы?

Микроопыт

Вы можете самостоятельно изготовить простейший гальванический элемент по известному старинному рецепту. Разрежьте лимон острым ножом поперек, стараясь сохранить перепонки, разделяющие дольки. В каждую дольку воткните попеременно кусочки медной и цинковой проволочек, соедините их попарно по кругу и от двух крайних сделайте два вывода («полюса»). Как проверить работоспособность такого элемента?

Любопытно, что...

...вероятно, первыми гальваническими элементами были найденные при раскопках вблизи нынешнего Багдада керамические сосуды, закрытые асфальтовой пробкой с пропущенными через нее железным и медным стержнями. Удивительно, что эти «приборы» заработали и через пять тысяч лет, стоило лишь залить в сосуды морскую воду либо скисшее вино.

...непосредственными предшественниками таких родоначальников электрохимии, как Гальвани и Вольта, были англичанин Пристли, первым применивший электрическую искру для получения азотной кислоты, итальянец Беккариа, схожим путем выделявший металлы из их окислов, и голландцы Дейман и Труствик, также искрой разлагавшие воду. А знаменитый Кавендиш в течение 53 дней непрерывно ставил опыты по воспламенению электрической искрой смеси кислорода и водорода, доказывая скептикам, что при их соединении получается ... просто вода.

...изобретатель химического источника электрического тока Вольта, как ни странно, не заинтересовался его применением в химии. Первенство в открытии такого важного явления, как электролиз, принадлежало двум английским любителям естествознания – литератору Никольсону и врачу Карлейлю – после первых же их опытов с вольтовой батареей в 1800 году.

...чтобы ощутить «вкус электричества», Вольта поставил известный опыт : он прикладывал к середине языка золотую монету или серебряную ложку, а к кончику – оловянную пластинку и, соединяя их, чувствовал кисловатый привкус.

...великий изобретатель Дэви, открывший некоторые новые химические элементы и веселящий газ, первым нашедший техническое приложение электролизу, придумавший безопасную рудничную лампу и предложивший способ защиты металлов от коррозии, самой большой своей заслугой считал открытие миру... Майкла Фарадея.

...предшествуя современному определению ампера, базирующемуся на магнитном взаимодействии токов, долгое время международным стандартом единицы силы тока служил эталон, созданный на основе первого закона Фарадея для электролиза, выполняемого с большой точностью.

...чем выше диэлектрическая проницаемость растворителя, тем больше степень диссоциации растворяемых в нем веществ. Поэтому, например, соляная кислота при растворении в воде дает электролит с высокой электропроводностью, а ее раствор в этиловом эфире, у которого проницаемость почти в 20 раз меньше, чем у воды, проводит электрический ток очень плохо.

...исследования электролитов привели ученых к логическому выводу о дискретности электрического заряда. Так, ирландский физик Стоней, опираясь на законы Фарадея для электролиза, высказал идею о дискретности электричества, рассчитал величину заряда одновалентного иона и предложил для него термин «электрон».

...в конце XIX века аккумуляторные электромобили успешно соперничали с тогда еще несовершенными машинами с двигателями внутреннего сгорания. Но сегодня ситуация обратная – несмотря на огромные усилия, задача создания конкурентоспособного электромобиля еще не решена.

...в последние десятилетия традиционные химические источники тока стали активно вытесняться на рынке элементами с использованием лития, обладающими широким температурным диапазоном работоспособности и превосходной – порядка 10 лет и более – сохранностью заряда.

Что читать в «Кванте» об электрохимии

(*публикации последних лет*)

1. «Занимательный электролиз» – 1997, №2, с.40;
2. «Участок цепи с источником тока» – 1997, №3, с.35;
3. «Эти блуждающие токи» – 1998, №3, с.45;
4. «Горки, электрические токи и Кулон» – 1999, №1, с.31;
5. «Как покупать и как эксплуатировать батарейки?» – 2000, №2, с.18;
6. «Вольта, Эрстед, Фарадей» – 2000, №5, с.16;
7. «Электрические цепи постоянного тока» – 2001, №3, с.53.

Материал подготовил
А.Леонович

Как узреть свой затылок вдали

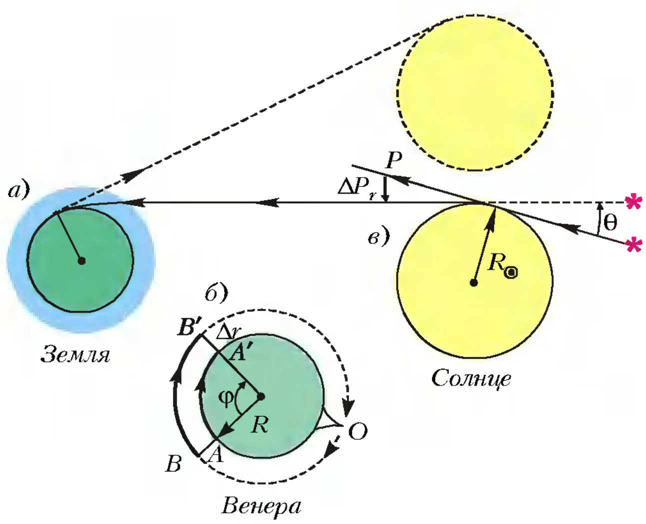
А. СТАСЕНКО

...Видишь, с какой быстротой восходящее солнце внезапно
Все облекает кругом потоками яркого света!..
Но и тот жар, что идет от солнца, и свет его ясный
Не в пустоте совершают свой путь; и двигаться тише
Свет принужден, пока он рассекает воздушные волны...

Лукреций

Очень легко наблюдать «преломление» чайной ложки в стакане воды. Еще древние греки пытались получить количественное выражение закона преломления. В случае прозрачных жидкостей это явление наблюдается легко, поскольку коэффициент преломления n для них значителен – например, скорость света $c_{\text{в}}$ в воде в $4/3$ раза меньше, чем скорость света c в вакууме: $n = c/c_{\text{в}} = 4/3$. В газах этот коэффициент значительно ближе к единице – так, в воздухе он отличается от единицы где-то в четвертом знаке. Но и это отличие вполне ощутимо: за счет искривления солнечных лучей в атмосфере мы видим Солнце раньше его «геометрического» восхода и позднее захода (см. рисунок). Таким образом в сутки набирается дополнительно несколько «лишних» минут светового дня, а за год – несколько суток, что немаловажно для колхозных полей и личных огородов. Это явление называется *атмосферной рефракцией*. Ее причина понятна: атмосфера с приближением к Земле становится все плотнее, а лучи отклоняются в сторону слоев с бóльшим коэффициентом преломления.

А нельзя ли вообразить планету с такой атмосферой, в которой луч искривляется настолько сильно, что возвращается в исходную точку? Тогда, в принципе, можно было бы увидеть свою спину вдалеке (см. рисунок *б*; луч $OBB'O$). Правда, очень вдалеке, на расстоянии порядка $2\pi R$, где R – радиус планеты. Такое явление уместно назвать *сверхрефракцией*.



Для того чтобы фронт волны AB после поворота радиуса-вектора на угол φ остался перпендикулярным поверхности планеты ($A'B'$), нужно, чтобы участки лучей AA' и BB' проходились волной за одно и то же время:

$$t = \frac{BB'}{c(R+\Delta r)} = \frac{AA'}{c(R)},$$

или

$$BB' \cdot n(R+\Delta r) = AA' \cdot n(R), \tag{1}$$

где $c(R+\Delta r)$ и $n(R+\Delta r) = n(R) + \Delta n$ – скорость волны и коэффициент преломления на высоте Δr. Поскольку $AA' = R\varphi$, $BB' = (R+\Delta r)\varphi$, из выражения (1) получим

$$(R+\Delta r)\varphi(n(R)+\Delta n) = R\varphi n(R).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной второго порядка ($\Delta r \Delta n \ll 1$), получим простое уравнение

$$-\frac{\Delta n}{n\Delta r} = \frac{1}{R}. \tag{2}$$

Значит, относительная убыль коэффициента преломления, отнесенная к приращению высоты, должна быть равной кривизне поверхности планеты (обратному значению ее радиуса).

Но как коэффициент преломления связан со свойствами атмосферы? Разумно предположить, что его отличие от единицы (это значение для вакуума) пропорционально концентрации N молекул: $n - 1 = \alpha N$, где α – некоторый коэффициент. Следовательно,

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\alpha \Delta N}{n} \approx \alpha \Delta N \tag{3}$$

(так как само значение n для газов очень близко к единице). Поскольку размерность концентрации молекул $[N] = \text{м}^{-3}$, коэффициент α должен иметь размерность объема: $[\alpha] = \text{м}^3$. Объема чего? Ну конечно же, он как-то должен быть связан с объемом молекул газов, входящих в состав атмосферы.

Возьмем Землю. Для воздуха (из соответствующих таблиц) $\alpha N \approx 3 \cdot 10^{-4}$, $N = 2{,}7 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}$; значит, $\alpha \approx 10^{-29}\ \text{м}^3$. Диаметр молекулы азота (основной компонент воздуха) равен $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м, ее объем составляет

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4\pi \cdot 27 \cdot 10^{-30}}{3 \cdot 8}\ \text{м}^3 \approx 4\pi \cdot 10^{-30}\ \text{м}^3 \sim \alpha.$$

Следовательно, можно считать, что произведение αN есть суммарная доля объема, занятого («вытесненного») самими молекулами.

А что творится, например, на Венере? Там имеется горячая ($T \approx 800$ К) и плотная ($p \approx 100$ атм) атмосфера углекислого газа (его молярная масса равна $44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). Концентрация молекул у поверхности равна

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{100 \cdot 10^5}{1{,}4 \cdot 10^{-23} \cdot 800}\ \text{м}^{-3} \sim 10^{27}\ \text{м}^{-3}$$

(здесь k – постоянная Больцмана). Радиус молекул углекислого газа в 1,25 раза больше, чем у азота; значит, объем больше почти в два раза, и $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-29}\ \text{м}^3$. Итак, у поверхности Венеры имеем $\alpha N \approx 0{,}02$, что на два порядка больше, чем для атмосферы Земли.

Далее, из условия равновесия столба газа высотой Δr и сечением S:

$$-\Delta p S = N m g \Delta r S$$

и из выражения для давления газа:

$$p = NkT$$

можно получить

$$-\frac{\Delta N}{\Delta r} = N\frac{mg}{kT} . \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) найдем окончательно

$$-\frac{\Delta n}{n\Delta r} \approx \alpha N\frac{mg}{kT} .$$

Подставляя сюда значения нужных величин для обеих планет, получим следующую таблицу (здесь $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг – масса протона):

	m/m_p	T, K	g, м/с^2	R, м	$1/R$, см$^{-1}$	$\|\Delta n/n\Delta r\|$, м$^{-1}$
Земля	29	300	9,8	$6{,}4\cdot 10^6$	$1{,}6\cdot 10^{-7}$	$3{,}4\cdot 10^{-8}$
Венера	44	800	8,5	$6{,}2\cdot 10^6$	$1{,}6\cdot 10^{-7}$	$1{,}1\cdot 10^{-6}$

Из последнего столбца следует, что кривизна луча на уровне Земли меньше, чем кривизна поверхности планеты, в то время как в атмосфере Венеры луч «кривее» ее поверхности. Это явление и называют сверхрефракцией.

Напомним, что при вычислениях использовалось значение концентрации молекул у поверхности планеты. Поднимаясь все выше – в горы или на аэростате, – можно найти такую точку О над поверхностью Венеры, что луч, выпущенный горизонтально, возвратится к нам, обогнув планету. И осуществится мечта: мы увидим-таки свой затылок далеко впереди. Если, конечно, пренебречь поглощением света в атмосфере.

Рефракция имеет место и в атмосфере Солнца (фотосфере). Казалось бы, какое нам дело до той рефракции? А вот и есть дело. Ученые как-то решили понаблюдать, как свет звезды, заходящей за диск Солнца, отклоняется в поле тяготения. Ведь каждый фотон обладает массой $h\nu/c^2$ (h – постоянная Планка, ν – частота); следовательно, пролетая у поверхности гравитирующего тела, он должен испытывать отклонение в сторону его центра.

Оценим прежде всего порядок величины этого угла отклонения θ. Очевидно, что наибольшая сила, действующая на фотон, будет на самом краю солнечного диска:

$$F_{\max} = -G\left(\frac{h\nu}{c^2}\right)\frac{M_\odot}{R_\odot^2} ,$$

где G – гравитационная постоянная, $\odot$ – астрономический знак Солнца. Очевидно также, что наиболее существенное отклонение фотон будет испытывать не вдалеке, а где-то в пределах расстояний, сравнимых с размерами самого Солнца, и за время $\Delta t \sim 2R_\odot/c$. Таким образом, радиальное изменение импульса фотона будет равно

$$\Delta P_r = F_{\max}\Delta t .$$

Значит, искомый угол (а он заведомо мал) будет порядка (см. рисунок *в*)

$$\theta \sim \frac{\Delta P_r}{P} = \frac{F_{\max}\Delta t}{h\nu/c} \sim -G\frac{2M_\odot}{c^2R_\odot} .$$

Интересно, что он одинаков для фотонов любой частоты. Подставляя численные значения ($M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг, $R_\odot = 0{,}7\cdot 10^9$ м), найдем

$$|\theta| \sim \frac{2\cdot 2\cdot 10^{30}\ \text{кг}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/\text{кг}\cdot\text{с}^2}{\left(3\cdot 10^8\ \text{м/с}\right)^2\cdot 0{,}7\cdot 10^9\ \text{м}} = 4{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{рад} = 0{,}87''$$

(меньше одной угловой секунды). Значение, предсказываемое общей теорией относительности (ОТО), вдвое больше: $\theta_{\text{ОТО}} = 1{,}7''$ (это объясняется искривлением пространства около гравитирующего тела – что не учитывает ньютоновская теория тяготения).

Конечно, измерение этого угла принципиально важно для проверки теории. Но дело в том, что неоднородность атмосферы Солнца может как-то маскировать исследуемый эффект. Рассмотрим поэтому и рефракцию электромагнитной волны в плазме фотосферы.

Ясно, что электрическое поле электромагнитной волны $\vec{E}$ стремится сместить положительные заряды вдоль своего направления, отрицательные заряды (электроны) – в противоположном направлении. Но первые гораздо массивнее вторых (даже самый легкий из ионов – протон – почти в 2000 раз «тяжелее» электрона), так что смещением ионов можно пренебречь. Сила же, действующая на электрон, равна $-eE(t)$. Пусть электрическое поле в волне колеблется с частотой ω, так что в рассматриваемой точке его можно записать, например, в виде

$$E(t) = E_m \sin\omega t ,$$

где E_m – амплитуда. Это поле стремится много раз в секунду ($\nu = \omega/(2\pi)$) «таскать» электроны вверх-вниз. Но каждый из них обладает массой m_e, которая есть мера инертности, т.е. нежелания смещаться из положения равновесия. Если в единице объема находится N_e электронов, их массовая плотность равна m_eN_e. Понятно, что все перечисленные факторы как-то должны войти в окончательное выражение для скорости распространения волны в плазме $c_{\text{п}}$. Оставляя в стороне строгий вывод (в него входят еще рассуждения о различии *фазовой* и *групповой* скоростей волны), приведем окончательный результат:

$$c_{\text{п}} = c\sqrt{1-\frac{\omega_*^2}{\omega^2}} ,$$

где в выражение для ω_* (*плазменной* частоты) вошли перечисленные выше параметры:

$$\omega_*^2 = \frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \qquad (5)$$

(множитель ε_0 свидетельствует об использовании Международной системы единиц). Значит, коэффициент преломления в этом случае равен

$$n = \frac{c}{c_{\text{п}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\omega_*^2/\omega^2}} > 1 . \qquad (6)$$

И значит, электромагнитная волна, проходя у края диска Солнца, должна отклоняться от «прямой линии». Таким образом, искомый эффект, действительно, может быть замаскирован атмосферной рефракцией.

Но можно подобрать такие частоты ω, на которых рефракция была бы несущественной. В самом деле, плазменная частота зависит от концентрации электронов (5), а последняя – от высоты над поверхностью Солнца. Следовательно, можно найти относительное приращение $-\dfrac{\Delta n}{\Delta r}$ (продифференцировав (6) при фиксированном значении ω или графически) и потребовать, чтобы эта величина была много меньше, чем кривизна $1/R_\odot$, – точно так же, как это было сделано для Земли и Венеры. А отсюда и можно найти допустимые значения ω. Но эту работу предоставим сделать перед сном самому Читателю.

Целая и дробная части числа

А.ЕГОРОВ

Упомянутые в заглавии функции довольно часто встречаются в самых разных областях математики – в частности, в алгебре, анализе, теории чисел, комбинаторике. Об этих и родственных им функциях, а также о задачах, с их помощью решаемых, мы и поговорим.

Целая часть числа и ее родственники

Целой частью $[x]$ *числа* x *называется наибольшее целое число, не превосходящее* x.

Например, $[-1{,}5]=-2$, $[-1]=-1$, $[0]=0$, $[1{,}5]=1$, $[\pi]=3$. Вообще, в силу определения, равенство $[x]=k$ означает, что k – это целое число, такое, что $k \le x < k+1$.

График функции $y=[x]$ (рис.1) состоит из ступенек и как бы образует лестницу, идущую слева направо и снизу вверх, переходящую в себя при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}=(1;1)$.

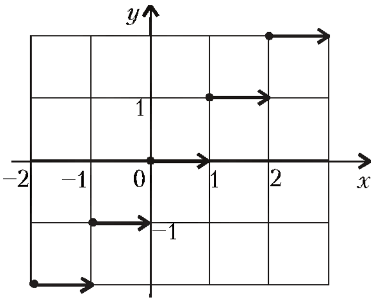


Рис. 1

В литературе также встречается термин «пол числа x» (в противоположность слову «потолок») и его обозначение $\lfloor x \rfloor$. Это то же самое, что и целая часть числа.

Сходным образом определяется функция $\lceil x \rceil$ – потолок числа x. Это *наименьшее целое число, не меньшее* x.

Например, $\lceil -1 \rceil = -1$, $\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2{,}5 \rceil = 3$.

График функции $y=\lceil x \rceil$ показан на рисунке 2.

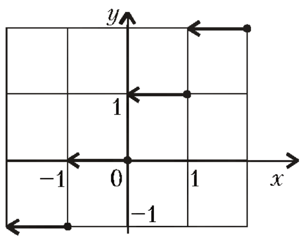


Рис. 2

Упражнения

1. Подумайте, как из графика $y=[x]$ получить график $y=\lceil x \rceil$, и выразите $\lceil x \rceil$ через целую часть.

2. Решите уравнения

а) $\left\lceil \frac{x^2-3x}{2} \right\rceil = 1$; б) $\left\lceil \frac{3x-1}{3} \right\rceil = 5$.

Отметим некоторые почти очевидные свойства целой части числа:

1) $[x] \le x$; 2) $[x+a]=[x]+a$, где a – произвольное целое число; 3) $[x+y] \ge [x]+[y]$ при любых x и y.

Упражнения

3. Докажите, что если $[x+a]=[x]+[a]$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, то a – целое число.

4. Постройте графики функций

а) $y=[2x]$; б) $y=[-x]$; в) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$.

5. Нарисуйте на плоскости xOy точки, для которых

а) $[x+y]=[x]+[y]$; б) $\left[x^2+y^2\right]=1$; в) $[x]=[y]$.

6. Докажите, что

$$[x]+[y]+[x+y] \le [2x]+[2y].$$

Наконец, иногда бывает полезна функция $y=(x)$ – ближайшее к x целое число. При этом если ближайших к x целых чисел два (что бывает при $x=\frac{2k+1}{2}$, где k – целое), выбирается большее из них.

Например, $\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $(\pi)=3$, $(0{,}8)=1$.

Нетрудно видеть, что $(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

Упражнение 7. Докажите это и постройте график функции $y=(x)$.

Дробная часть числа

Дробной частью $\{x\}$ *числа* x *называется число* $\{x\}=x-[x]$.

Так, $\{-0{,}3\}=0{,}7$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, $\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1$, $\{-2\sqrt{2}\}=$ $=2-\sqrt{2}$, $\{1\}=0$.

Отметим некоторые свойства дробной части:

1) равенство $\{x\}=x$ равносильно тому, что $0 \le x < 1$; 2) $\{x\}=\{y\}$ тогда и только тогда, когда $x-y=n$, где n – целое число; в частности, 3) $\{x+1\}=\{x\}$ для любого x.

Таким образом, функция $y=\{x\}$ периодична с периодом 1. График ее показан на рисунке 3 (покосившийся периодический забор).

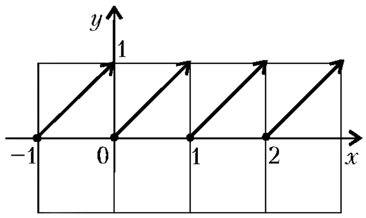


Рис. 3

С дробной частью тесно связана еще одна функция: $y=\{\{x\}\}$ – расстояние от x до ближайшего целого числа. В отличие от дробной части последняя функция непрерывна. Ее график изображен на рисунке 4.

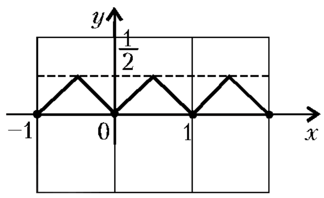


Рис. 4

Упражнения

8. Докажите, что $\{\{x\}\}=\left|\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right|$.

9. Докажите, что $\{k\{x\}\}=\{kx\}$ при любом натуральном k, и решите уравнение $\{3\{x\}\}=x$.

10. Решите уравнения

а) $\{3x\}=\frac{1}{2}$; б) $\{6x\}+\{x\}=1$.

11. Изобразите на плоскости xOy точки, для которых
а) $\{x\}=\{y\}$; б) $\{x\}+\{y\}<1$.

Несколько задач

Уравнения, неравенства и другие задачи про целые и дробные части числа довольно часто встречаются на математических олимпиадах разных уровней. Разберем несколько характерных примеров.

Задача 1 (II Соросовская олимпиада). *Решите уравнение*

$$x^2-10[x]+9=0.$$

Решение. Пусть $[x]=k$. Прежде всего, ясно, что $k\ge 0$. Поскольку $x\ge k$, получаем при $x\ge 0$ неравенство

$$x^2-10x+9\le 0.$$

Отсюда следует, что $1\le x\le 9$, но тогда и $1\le k\le 9$, причем x^2+9 – целое число, делящееся на 10. Проверка показывает, что годятся значения $x=1$, $x=\sqrt{61}$, $x=\sqrt{71}$, $x=9$.

Ответ. 1; $\sqrt{61}$; $\sqrt{71}$; 9.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x].$$

Решение. Пусть $[x]=k$. Тогда

$$\begin{cases} k\le \dfrac{2x+1}{3}<k+1,\\ k\le x<k+1.\end{cases}$$

Запишем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\le x<\dfrac{3k+2}{2},\\ k\le x<k+1,\end{cases} \qquad (*)$$

откуда следует, что k обязано удовлетворять неравенствам

$$\frac{3k-1}{2}<k+1,\ k<\frac{3k+2}{2},$$

т.е. $-2<k<3$.

Итак, возможны следующие значения k: –1; 0; 1; 2. Подставляя последовательно эти значения в систему $(*)$ и решая полученные неравенства, находим ответ.

Ответ. $-1\le x<-\frac{1}{2}$; $0\le x<2$; $\frac{5}{2}\le x<3$.

Замечание. Можно было решить эту задачу и иначе. Построив графики левой и правой частей исходного уравнения, обнаружим, что они совпадают на промежутках, указанных в ответе.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\left[x^2\right]=2[x].$$

Решение. Пусть $[x]=k$, $\{x\}=\alpha$. Тогда $k\ge 0$, $\alpha\ge 0$ и

$$\left[(k+\alpha)^2\right]=2[k+\alpha],$$

после чего приходим к уравнению

$$\left[2k\alpha+\alpha^2\right]=2k-k^2.$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а k – целое число, то $2k-k^2\ge 0$, и возможны три значения k – это 0, 1 и 2.

При $k=0$ получим $\left[\alpha^2\right]=0$, что выполняется при всех $0\le\alpha<1$. Отсюда $0\le x<1$.

При $k=1$ приходим к уравнению

$$\left[2\alpha+\alpha^2\right]=1,$$

что дает систему $1\le 2\alpha+\alpha^2<2$, $0\le\alpha<1$, откуда $\sqrt{2}-1\le\alpha<1$, т.е. $\sqrt{2}\le x<2$.

Наконец, при $k=2$ имеем уравнение

$$\left[4\alpha+\alpha^2\right]=0,$$

равносильное системе $0\le 4\alpha+\alpha^2<1$, $0\le\alpha<1$. Ее решение – промежуток $0\le\alpha<\sqrt{5}-2$, откуда $2\le x<\sqrt{5}$.

Объединяя полученные промежутки, запишем ответ.

Ответ. $0\le x<1$, $\sqrt{2}\le x<\sqrt{5}$.

Задача 4 (V Соросовская олимпиада). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}9,\\ y+[z]+\{x\}=3{,}5,\\ z+[x]+\{y\}=2.\end{cases}$$

Решение. Пусть $a=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $b=[y]$, $\beta=\{y\}$, $c=[z]$, $\gamma=\{z\}$, где a, b, c – целые числа, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$, $0\le\gamma<1$. В этих обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} a+\alpha+b+\gamma=3{,}9,\\ b+\beta+c+\alpha=3{,}5,\\ c+\gamma+a+\beta=2.\end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$2(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)=9{,}4,$$

т.е.

$$a+b+c+\alpha+\beta+\gamma=4{,}7.$$

Вычитая из полученного уравнения последовательно первое, второе и третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases} c+\beta=0{,}8,\\ a+\gamma=1{,}2,\\ b+\alpha=2{,}7,\end{cases}$$

откуда следует, что $c=0$, $\beta=0{,}8$, $a=1$, $\gamma=0{,}2$, $b=2$, $\alpha=0{,}7$.

Ответ. $x=1{,}7$; $y=2{,}8$; $z=0{,}2$.

Вот еще одна задача о поведении целых и дробных частей чисел вида ξ^n, где ξ – корень некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 5. *Докажите, что а)* $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$ *– нечетное число; б)* $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>0,\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

Решение. Раскрывая скобки в выражении $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}$, получим

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=A+B\sqrt{3},$$

где A и B – натуральные числа, причем

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}.$$

Но тогда

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=2A.$$

Далее,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}=2A-1+1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]=2A-1-\text{ нечетное число,}$$

а

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}.$$

Оценим степень в правой части полученного равенства:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}=\frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}}<\frac{1}{10^{1001}}.$$

Поэтому $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>0,\underbrace{9\ldots9}_{1001}$.

В следующей задаче целая часть находит довольно неожиданное применение.

Задача 6. *Рассмотрим последовательность*

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

(последовательно выписаны единица, две двойки, три тройки, четыре четверки, пять пятерок и т.д.). Какое число стоит на месте с номером а) 2002; б) n?

Решение. Пусть $x_n=k$ – член заданной последовательности с номером n. До первого появления числа k выписано $1 + 2 + 3 + \ldots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$ чисел. А последнее число k стоит на месте с номером $\frac{k(k+1)}{2}$. Поэтому

$$\frac{k(k-1)}{2}<n\le\frac{k(k+1)}{2},$$

откуда

$$k^2-k<2n\le k^2+k.$$

Заметим, что к левой и правой частям последнего неравенства можно прибавить по $\frac{1}{4}$, так что

$$k^2-k+\frac{1}{4}<2n<k^2+k+\frac{1}{4},$$

т.е.

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<2n<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2},$$

откуда

$$k<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

Следовательно,

$$x_n=\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right].$$

Мы получили формулу, позволяющую вычислить n-й член исходной последовательности. В частности, $x_{2002}=63$.

Упражнения

12. Решите уравнение $[x]^2=\left[x^2\right]$.

13. Найдите наименьшее положительное x, для которого $[x]\cdot\{x\}\ge3$.

14. а) Докажите, что $\left[\sqrt{[x]}\right]=\left[\sqrt{x}\right]$ при всех $x\ge0$.

б) При каких $a>1$ равенство $\left[\log_a[x]\right]=\left[\log_a x\right]$ выполняется при всех $x > 0$?

15. Докажите, что $\left\{\left(5+\sqrt{26}\right)^n\right\}<\frac{1}{10^n}$ при любом натуральном n.

Целая часть и деление с остатком

Разделим с остатком натуральное число a на натуральное число b, т.е. запишем a в виде

$$a=kb+r,$$

где частное k – целое неотрицательное число, а остаток $0\le r\le b-1$. Перепишем равенство так:

$$\frac{a}{b}=k+\frac{r}{b}.$$

По определению целой и дробной частей,

$$k=\left[\frac{a}{b}\right],\ \frac{r}{b}=\left\{\frac{a}{b}\right\},$$

так что

$$a=\left[\frac{a}{b}\right]b+b\left\{\frac{a}{b}\right\}.$$

Мы сумели выразить частное и остаток через целую и дробную части числа $\frac{a}{b}$.

А теперь давайте выясним, сколько существует натуральных чисел, меньших данного числа x (не обязательно целого) и делящихся на данное натуральное число n.

Ясно, что если $n > x$, то таких чисел нет. Если же $kn\le x<(k+1)n$, то это числа n, $2n$, ..., kn. Их ровно k штук. А так как

$$k\le\frac{x}{n}<k+1,$$

то $k=\left[\frac{x}{n}\right]$.

Это простое замечание позволит нам получить одну важную для теории чисел формулу. Но сначала решим такую задачу.

Задача 7. *На какую степень двойки делится 100!?*

Решение. По доказанному ранее, среди чисел 1, 2, ..., 100 имеется

$\frac{100}{2}=50$ четных чисел,

$\frac{100}{4}=25$ чисел, делящихся на 4,

$\left[\frac{100}{8}\right]=12$ чисел, делящихся на 8,

$\left[\frac{100}{16}\right]=6$ чисел, делящихся на 16,

$\left[\frac{100}{32}\right]=3$ числа, делящихся на 32,

$\left[\frac{100}{64}\right]=1$ число, делящееся на 64.

Отсюда следует, что всего в произведение 100! входит 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97 двоек, т.е. 100! делится на 2^{97} и не делится на 2^{98}.

Ответ. 97.

Аналогично, при любом n и простом p есть $\left[\frac{n}{p}\right]$ чисел, делящиеся на p, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ – делящихся на p^2, $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ – делящихся на p^k. Если $p^m\le n<p^{m+1}$, то показатель степени, в которой число p входит в разложение $n!$ на простые множители, равен

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right].$$

Иногда прибегают к такой записи:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots,$$

имея в виду, что в написанной сумме все слагаемые, начиная с некоторого места, равны нулю.

Упражнения

16. а) При каких натуральных n число $n!$ делится на 2^n?
б) Существует ли такое k, что $n!$ делится 2^{n-k} при всех n?
в) Пусть $p > 2$ – простое число. Существует ли такое k, что $n!$ делится на p^{n-k} при всех n?

17. На какую степень двойки делится число $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$?

18. Докажите, что $(n!)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$.

19. На какую степень простого числа p делится число
а) $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$; б) $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$?

Подсчет количества целых точек

Начнем с совсем простого вопроса. Сколько целых чисел содержится в интервале $(\alpha;\beta)$? Ясно, что если целое число m удовлетворяет неравенствам $\alpha<m<\beta$, то $[\alpha]+1\le m<$ $<[\beta]$, но таких чисел имеется в точности $[\beta]-[\alpha]$. Это так же легко понять, как и то, что *между* 1 и 10 мая ровно 8 дней.

Аналогичный вопрос. Сколько чисел, кратных данному $x>0$ (т.е. чисел вида nx, где n – целое число), содержится в промежутке $(\alpha;\beta)$? Ответ очевиден – таких чисел ровно $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$.

Теперь решим задачу.

Задача 8. *Докажите, что если $x>0$ и n натуральное, то*

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right].$$

Решение. Рассмотрим натуральные числа, меньшие x и делящиеся на n. Таких чисел ровно $\left[\frac{x}{n}\right]$. Но те же самые числа образуют множество чисел, не превосходящих $[x]$ и делящихся на n. Отсюда и следует доказываемое равенство.

Упражнение 20. Найдите количество натуральных чисел, меньших x и делящихся на 2 или на 3.

Следующая важная для теории чисел задача решается с помощью подсчета числа целых точек на плоскости.

Задача 9. *Пусть p и q – взаимно простые целые числа. Докажите, что*

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Решение. Рассмотрим на плоскости xOy точки $(x;y)$ с целыми координатами, такие, что $1\le x\le q-1$, $1\le y\le$ $\le p-1$, т.е. точки, лежащие *внутри* прямоугольника $OABC$ (рис.5). Всего имеется $(p-1)(q-1)$ таких точек. Заметим, что на диагонали OB этого прямоугольника нет точек с целыми координатами, кроме точек O и B. (В самом деле, прямая OB имеет уравнение $y=\frac{p}{q}x$. Если целая точка $(m;n)$ лежит на OB, причем $1<m<q$, то $\frac{n}{m}=\frac{p}{q}$, т.е. $qn=$ $=mp$. Но так как q и p взаимно просты, то n делится на p, а m делится на q, т.е. $m\ge q$, $n\ge p$. Противоречие.) Поэтому в треугольнике OBC содержится ровно половина рассматриваемых целых точек, т.е. $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Подсчитаем теперь это же количество другим способом. При $x=k$ (k – натуральное число) на отрезке KL лежат $\left[\frac{p}{q}k\right]$ точек с целыми координатами. Таким образом, их общее количество равно сумме

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right],$$

что и доказывает равенство из условия задачи.

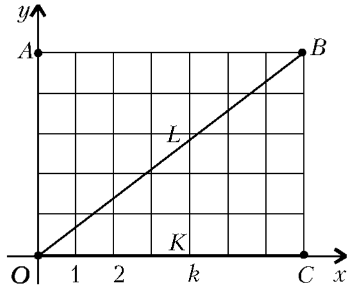


Рис. 5

Точно так же доказывается, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Разберем еще один пример. Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей натурального числа n, и решим такую задачу.

Задача 10. *Докажите, что*

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right].$$

Решение. Количество чисел из множества 1, 2, …, n, делящихся на некоторое число k, равно $\left[\frac{n}{k}\right]$ (это числа k, $2k$, …, $\left[\frac{n}{k}\right]k$). Сумма $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$ равна количеству чисел, делящихся на 1, плюс количество чисел, делящихся на 2, …, плюс количество чисел, делящихся на n. Но ведь это и есть сумма $\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\ldots+\tau(n)$.

Этот результат тем более интересен, что количество делителей натурального n выражается через n весьма непросто. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1,p_2,\ldots p_k$ – простые числа. Тогда $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякий делитель d числа n имеет разложение вида $d=p_1^{\beta_1}\ldots p_k^{\beta_k}$, где $0\le\beta_i\le\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, т.е. однозначно определяется набором чисел $(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_k)$. Но всего таких наборов существует $(\alpha_1+1,\alpha_2+1,\alpha_k+1)$.

Отметим еще одно полезное соотношение.

Задача 11. *Пусть $\sigma(n)$ – сумма всех делителей числа n. Тогда*

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right].$$

Решение. Число 1 – делитель всех чисел, поэтому $\left[\frac{n}{1}\right]=n$ – сумма всех единиц. На 2 делится $\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел, так что $2\left[\frac{n}{2}\right]$ есть сумма всех двоек – делителей чисел от 1 до n. Вообще, $\left[\frac{n}{k}\right]$ – количество чисел, не больших n и делящихся на k. Поэтому $k\left[\frac{n}{k}\right]$ – это сумма всех делителей, равных k. Следовательно, сумма по k всех чисел вида $k\left[\frac{n}{k}\right]$ есть в точности левая часть доказываемого равенства.

Упражнение 21. Докажите, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Электростатическое поле в веществе

В.МОЖАЕВ

При помещении диэлектрика в электрическое поле происходит поляризация диэлектрика. В случае полярных диэлектриков силы, действующие со стороны электрического поля на заряды молекул, создают момент сил, который стремится развернуть молекулу (диполь) вдоль силовых линий поля. В неполярных диэлектриках под действием поля происходит деформация молекул: положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны, и молекулы превращаются в диполи.

В общем случае, при неоднородной поляризации диэлектрика внутри него и на его поверхности появляются связанные заряды. Напряженность электрического поля в любой точке пространства будет являться суперпозицией внешнего поля и поля, создаваемого связанными зарядами.

В образцах, имеющих форму тонкой пластины, шара или тонкого и длинного цилиндра, во внешнем однородном поле будет происходить однородная поляризация. В этом случае связанных объемных зарядов не будет, а возникают только поверхностные связанные заряды. Эти заряды создают электрическое поле, направленное в диэлектрике против внешнего поля, и результирующее поле в диэлектрике ослабляется. Степень ослабления поля зависит как от формы образца, так и от свойств диэлектрика.

Если мы возьмем заряженный плоский конденсатор и полностью заполним его диэлектрической средой (при сохранении зарядов на обкладках конденсатора), то в этом случае отношение напряженности электрического поля в конденсаторе без диэлектрика (в вакууме) к напряженности поля внутри диэлектрика (после заполнения им конденсатора) будет определяться только электрическими свойствами диэлектрика. Величина этого отношения называется диэлектрической проницаемостью и обозначается ε.

Теперь перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. *Два одинаковых плоских воздушных конденсатора с квадратными обкладками со стороной а частично заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис.1). На каждом конденсаторе находится заряд Q. Определите напряженность электрического поля в диэлектриках и поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектриках.*

Рассмотрим сначала конденсатор, изображенный на рисунке 1,*а*. Такой конденсатор эквивалентен двум последовательно соединенным конденсаторам, один из которых воздушный с расстоянием между пластинами $d - x$, а другой – заполненный диэлектриком с расстоянием между пластинами x. Емкость полностью заполненного диэлектриком конденсатора равна $C = \varepsilon_0\varepsilon a^2/x$. Поскольку конденсаторы соединены последовательно, то заряд на каждом из них равен Q. Тогда разность потенциалов на конденсаторе с диэлектри-

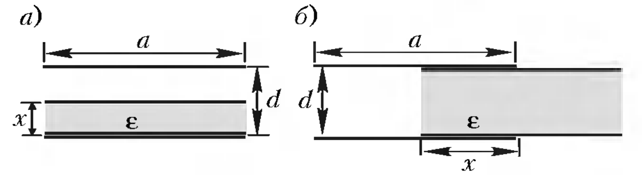


Рис. 1

ком равна $U = Q/C$, а напряженность поля в диэлектрике составляет

$$E_д = \frac{U}{x} = \frac{Qx}{\varepsilon_0\varepsilon a^2 x} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon a^2}.$$

Мы получили, что напряженность поля в диэлектрике в ε раз меньше, чем при отсутствии диэлектрика.

Теперь найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхностях диэлектрика. Электрическое поле в воздушном зазоре создается только свободными зарядами на обкладках конденсатора. (рис.2,*а*):

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2}.$$

Поле в диэлектрике является суперпозицией поля $\vec{E}_1$ и поля

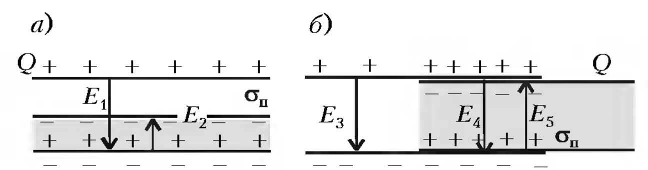


Рис. 2

$\vec{E}_2$, создаваемого связанными зарядами. Обозначим через $\sigma_п$ поверхностную плотность связанных зарядов. Тогда

$$E_2 = \frac{\sigma_п}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля в диэлектрике, с одной стороны, равна

$$E_д = E_1 - E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2} - \frac{\sigma_п}{\varepsilon_0},$$

а с другой стороны, мы раньше получили, что

$$E_д = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon a^2}.$$

Приравняем друг другу эти два выражения:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 a^2} - \frac{\sigma_п}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon a^2},$$

откуда получим

$$\sigma_п = \frac{(\varepsilon - 1)Q}{\varepsilon a^2}.$$

Сделаем предельные переходы: при $\varepsilon \to 1$ $\sigma_п \to 0$, а при $\varepsilon \to \infty$ $\sigma_п \to \dfrac{Q}{a^2}$. Первый случай соответствует полному отсутствию диэлектрика (конденсатор пустой), второй – замене диэлектрика металлической пластиной.

Теперь рассмотрим конденсатор, изображенный на рисунке 1,*б*. Такой конденсатор эквивалентен двум параллельно соединенным конденсаторам: воздушному и полностью заполненному диэлектриком. Суммарная емкость такой системы равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a x}{d} = \frac{\varepsilon_0 a(a-x+\varepsilon x)}{d}.$$

Разность потенциалов между обкладками исходного конденсатора составляет

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 a(a-x+\varepsilon x)}.$$

Напряженность поля в диэлектрике равна напряженности поля в воздушной части конденсатора (рис.2,*б*):

$$E_д = E_3 = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 a(a-x+\varepsilon x)}.$$

Поскольку емкость конденсатора, полностью заполненного диэлектриком, составляет

$$C_д = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a x}{d},$$

то свободный заряд на этом конденсаторе равен

$$Q_C = C_д U = \frac{Q\varepsilon x}{(a-x+\varepsilon x)}.$$

Этими зарядами создается поле

$$E_4 = \frac{Q_C}{\varepsilon_0 a x} = \frac{\varepsilon Q}{\varepsilon_0 a(a-x+\varepsilon x)},$$

а напряженность поля E_5 определяется связанными зарядами:

$$E_5 = \frac{\sigma_п}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma_п$ – поверхностная плотность связанных зарядов. Используем тот факт, что $E_3 = E_4 - E_5$, и найдем $\sigma_п$:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 a(a-x+\varepsilon x)} = \frac{\varepsilon Q}{\varepsilon_0 a(a-x+\varepsilon x)} - \frac{\sigma_п}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$\sigma_п = \frac{(\varepsilon-1)Q}{a(a-x+\varepsilon x)}.$$

Проведем проверку полученного результата: при $\varepsilon \to 1$ $\sigma_п \to 0$ (случай пустого конденсатора), при $\varepsilon \to \infty$ $\sigma_п \to Q/(ax)$ (вместо диэлектрика – проводящая пластина). Действительно, во втором случае весь заряд обкладок соберется на площади $S = ax$. Дело в том, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, а из этого следует, что напряженность поля в воздушном зазоре также равна нулю. Отсутствие поля в воздушном пространстве конденсатора означает, что поверхностная плотность зарядов на обкладках длиной $a - x$ равна нулю, а весь заряд собрался на обкладках длиной x.

Задача 2. *Диэлектрическая пластина толщиной l_2 с диэлектрической проницаемостью ε введена в плоский воздушный конденсатор (рис.3). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1. Определите силу притяжения между обкладками конденсатора, если разность потенциалов между ними U, а площадь пластин S.*

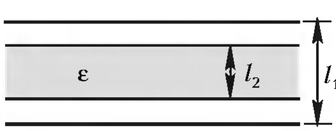


Рис. 3

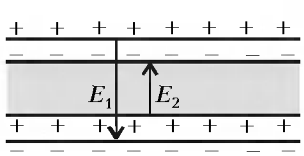


Рис. 4

Пространство между пластинами нашего конденсатора разбивается на две области (рис.4): воздушный зазор, в котором электрическое поле E создается свободными зарядами обкладок, и слой диэлектрика, в котором электрическое поле создается и свободными и связанными зарядами и равно $E_д = E_1 - E_2$. Эта система эквивалентна двум последовательно соединенным конденсаторам: один из них воздушный с расстоянием между пластинами l_1, а второй – заполненный диэлектриком толщиной l_2. Емкость первого конденсатора равна $C_1 = \varepsilon_0 S/l_1$, а второго – $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon S/l_2$. Общая емкость равна

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon l_1 + l_2}.$$

Зная напряжение на конденсаторе, можно найти его заряд:

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{\varepsilon l_1 + l_2}$$

и напряженность электрического поля в воздушном зазоре:

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon l_1 + l_2}.$$

Но это поле создается обеими пластинами, а поле одной пластины равно

$$\frac{E_1}{2} = \frac{\varepsilon U}{2(\varepsilon l_1 + l_2)}.$$

Тогда сила притяжения, действующая на каждую обкладку конденсатора, равна

$$F = \frac{E_1}{2} Q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 S U^2}{2(\varepsilon l_1 + l_2)^2}.$$

Задача 3. *Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор подсоединен к батарее постоянного тока, ЭДС которой $\mathcal{E}$. Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор (рис.5). На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом произведена работа A?*

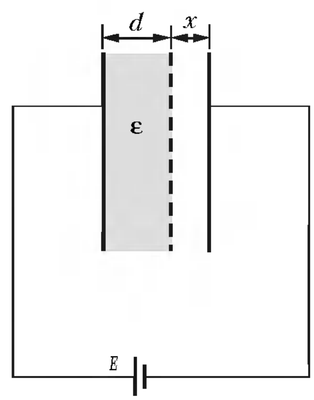


Рис. 5

Емкость исходного конденсатора равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Емкость конденсатора после перемещения правой обкладки на x будет равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов: конденсатора емкостью C_1 и воздушного конденсатора емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{x}.$$

Емкость системы двух конденсаторов составляет

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d + \varepsilon x}.$$

Мы видим, что при перемещении обкладки емкость конденсатора уменьшается, а следовательно, уменьшается и заряд на обкладках конденсатора при постоянном напряжении на них. Первоначальный заряд на конденсаторе был

$$Q_1 = C_1\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}}{d},$$

а после перемещения стал

$$Q_2 = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}}{d+\varepsilon x}.$$

Теперь найдем энергию, запасенную в конденсаторе в двух состояниях – исходном и конечном:

$$W_1 = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2d},$$

$$W_2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2(d+\varepsilon x)}.$$

Перемещая обкладку конденсатора, мы совершили работу A. По закону сохранения энергии эта работа пошла на изменение энергии конденсатора и на работу против ЭДС источника, поскольку при перемещении обкладки конденсатора его заряд уменьшается и ток течет против ЭДС:

$$A = (W_2 - W_1) + (Q_1 - Q_2)\mathcal{E} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2(d+\varepsilon x)} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2d}\right) + \left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{d} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{d+\varepsilon x}\right) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon^2 S\mathcal{E}^2 x}{2d(d+\varepsilon x)}.$$

Отсюда находим искомое перемещение пластины конденсатора:

$$x = \frac{d}{\varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2Ad} - 1\right)}.$$

Задача 4. *В плоский конденсатор вдвигается с постоянной скоростью v пластина из диэлектрика (рис.6). Определите ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору. Считать известными ЭДС батареи $\mathcal{E}$, диэлектрическую проницаемость ε, высоту пластины h, площадь квадратных пластин конденсатора $S = b^2$.*

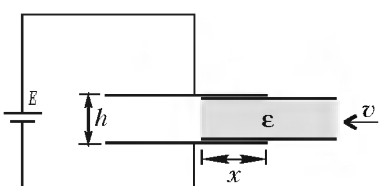


Рис. 6

Выберем в качестве переменной величины длину диэлектрика, находящегося в конденсаторе. Найдем емкость конденсатора в тот момент, когда пластина вошла в конденсатор на величину x. Такой конденсатор эквивалентен системе двух параллельно соединенных конденсаторов: воздушного емкостью

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S(b-x)}{bh}$$

и диэлектрического емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon Sx}{bh}.$$

Емкость нашей системы равна

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S(b + (\varepsilon-1)x)}{bh}.$$

Заряд на конденсаторе в этот момент равен

$$Q = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}(b + (\varepsilon-1)x)}{bh}.$$

Следовательно, в цепи батареи идет ток

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}(\varepsilon-1)}{bh}\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}(\varepsilon-1)}{bh}v = \frac{\varepsilon_0 b\mathcal{E}(\varepsilon-1)v}{h}.$$

Задача 5. *В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U. Расстояние между пластинами d, плотность жидкости ρ, диэлектрическая проницаемость ε. На какую высоту поднимется жидкость в кондесаторе? Поверхностным натяжением пренебречь.*

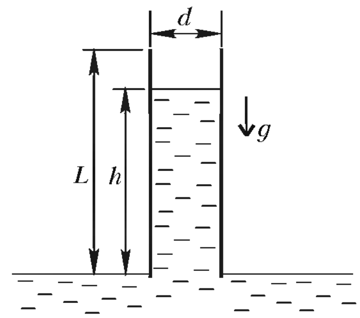


Рис. 7

Обозначим высоту подъема жидкости через h, высоту пластин через L, а размер пластин в направлении, перпендикулярном рисунку 7, через a. Идея решения задачи заключается в следующем: запишем полную энергию нашей системы, которая является функцией от h, а затем исследуем ее на минимум по переменной h. Очевидно, что при некотором h энергия системы будет минимальна, а производная энергии по h будет равна нулю. Это и будет установившаяся высота подъема жидкости.

Сначала найдем емкость нашего конденсатора при подъеме жидкости на высоту h. Мы имеем систему двух параллельных конденсаторов, поэтому общая емкость равна их сумме:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon ha}{d} + \frac{\varepsilon_0(L-h)a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(h(\varepsilon-1) + L).$$

Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости при нулевом уровне, отсчитываемым от уровня жидкости в сосуде, составляет

$$W_2 = \frac{ad\rho gh^2}{2}.$$

Энергию, запасенную в батарее, можно записать в виде

$$W_3 = W_0 - QU = W_0 - CU^2,$$

где W_0 – полный запас энергии батареи, а CU^2 – это израсходованная энергия батареи, т.е. работа, которую совершила батарея, заряжая конденсатор до напряжения U. Полная энергия нашей системы равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 =$$

$$= \frac{CU^2}{2} + \frac{ad\rho gh^2}{2} + W_0 - CU^2 = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + W_0.$$

Подставив сюда выражение для емкости, получим

$$W = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 a(h(\varepsilon-1)+L)U^2}{2d} + W_0.$$

Продифференцируем это выражение по h и приравняем к нулю:

$$\frac{dW}{dh} = ad\rho gh - \frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon-1)U^2}{2d} = 0.$$

Отсюда найдем высоту подъема жидкости:

$$h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2\rho g} \left(\frac{U}{d} \right)^2 .$$

Упражнения

1. Внутри плоского конденсатора с площадью пластин $S = 200$ см^2 и расстоянием между ними d = 0,1 см находится пластина из стекла ($\varepsilon = 5$), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластину? Решить задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время подсоединен к батарее с напряжением U = 300 В; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, затем отключен, и после этого пластина была удалена. Найдите также механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

2. Плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены горизонтально, наполовину залит жидким диэлектриком с проницаемостью ε. Какую часть конденсатора надо залить этим же диэлектриком при вертикальном расположении пластин, чтобы емкости в обоих случаях были одинаковы?

3. В подключенный к батарее плоский конденсатор вставляются две пластины из сегнетоэлектрика ($\varepsilon = 100$) таким образом, что между ними остается небольшой зазор (рис.8). При какой величине зазора h поле в нем будет в n = 50 раз больше, чем в отсутствие диэлектрика? Расстояние между обкладками d = 2 см.

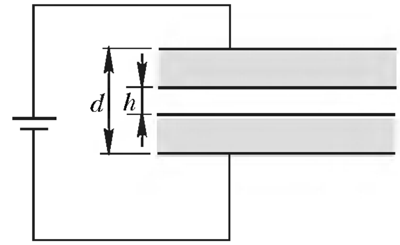


Рис. 8

4. Плоский конденсатор с горизонтально расположенными пластинами подсоединен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ и помещен в сосуд, который постепенно заполняется керосином ($\varepsilon = 2$). Найдите зависимость напряженности поля в центре конденсатора от толщины слоя керосина h внутри него. Расстояние между пластинами конденсатора равно d.

Точка на окружности

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН, В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Задачи о точках, лежащих на окружности, о хордах и касательных, проходящих через эти точки, часто встречаются в вариантах вступительных экзаменов. С методами решения таких задач мы и собираемся познакомить читателей.

Напомним основные теоремы, которыми нам в дальнейшем придется часто пользоваться. Это прежде всего теоремы о вписанных углах, углах между хордами и касательными, углах с вершиной внутри и вне круга и, разумеется, теорема синусов. Причем теорему синусов часто бывает удобно применять в следующей формулировке: *если из точки A окружности радиуса R хорда BC длины a видна под углом* α, *то* $a = 2R\sin\alpha$ *(рис.1)*.

Мы рекомендуем читателям вспомнить формулировки и доказательства упомянутых теорем. Ведь очень часто доказательство той или иной теоремы содержит в себе методы решения близких по формулировке задач.

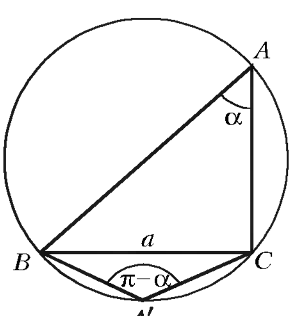


Рис. 1

В дальнейшем мы будем придерживаться стандартных обозначений сторон, углов и других элементов треугольника, т.е. полагать, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Радиус окружности, проходящей через три заданные точки K, L, M, будем обозначать как R_{KLM}.

Итак, приступим к решению задач.

Задача 1. *В треугольнике ABC даны сторона BC = a и* $\angle A = \alpha$. *Пусть I – центр вписанной окружности, H – ортоцентр (точка пересечения высот),* B_1 *и* C_1 *– основания высот, проведенных из вершин B и C. Найдите* R_{ABC}, R_{BIC}, R_{BHC}, *а также отрезки* B_1C_1 *и AH.*

Решение. По теореме синусов находим радиус описанной около треугольника ABC окружности:

$$R = R_{ABC} = \frac{a}{2\sin\alpha} .$$

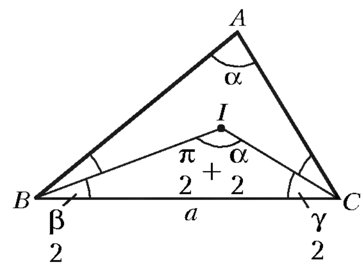


Рис. 2

Так как I – точка пересечения биссектрис (рис.2),

$$\angle BIC = \pi - \frac{\beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} .$$

(Заметим попутно, что $\angle BIC$ всегда тупой и выражается только через угол α.) По теореме синусов,

$$R_{BIC} = \frac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} .$$

Угол BHC также выражается через α, а именно, $\angle BHC = \pi - \alpha$. Кстати, здесь необходимо рассмотреть два возможных случая: $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис.3,*а*) и $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (рис.3,*б*). Проследите это самостоятельно. Снова по теореме синусов

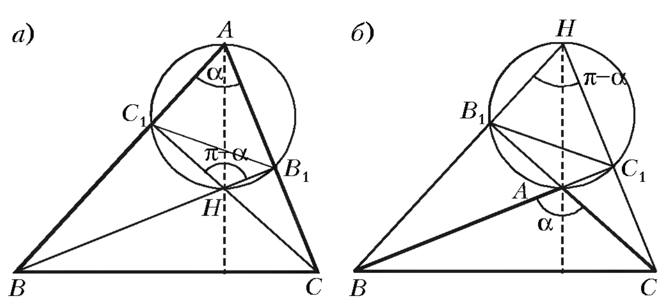


Рис. 3

получаем

$$R_{BHC} = \frac{BC}{2\sin(\pi - \alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha} = R\ .$$

Для отыскания AH заметим, что точки A, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности с диаметром AH (см. рис.3). По теореме синусов, $C_1B_1 = AH\sin\alpha$. Найдем отрезок B_1C_1. Для этого заметим, что треугольник B_1AC_1 подобен треугольнику ABC, ибо из прямоугольных треугольников BB_1A и CC_1A получаем

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos\alpha$$

(или $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ при $\alpha > \frac{\pi}{2}$). Поэтому треугольники B_1AC_1 и ABC подобны с коэффициентом $|\cos\alpha|$. Но тогда

$$B_1C_1 = a|\cos\alpha|$$

и

$$AH = a|\operatorname{ctg}\alpha|\ .$$

Упражнения

1. Из точек A и A_1, лежащих по одну сторону от прямой BC, отрезок BC виден под одним и тем же углом $\alpha \neq 0$. Докажите, что около четырехугольника BAA_1C можно описать окружность.

2. Из точек A и A', лежащих по разные стороны от прямой BC, отрезок BC виден под углами α и $180° - \alpha$ соответственно. Докажите, что около четырехугольника $BACA'$ можно описать окружность.

3. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

4. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 (см. задачу 1).

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольнике KLM угол L тупой, а длина стороны KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.*

Решение. Обозначим через H ортоцентр треугольника KLM, через O – центр окружности, проходящей через точки K, M, H (рис.4). По условию угол L тупой. Поэтому точка H лежит вне $\triangle KLM$, точка L является точкой пересечения высот в $\triangle KHM$ и лежит внутри $\triangle KHM$, а треугольник KHM – остроугольный (его углы при вершинах K, H, M являются острыми углами прямоугольных треугольников MKM_1, MHM_1, KMK_1 соответственно).

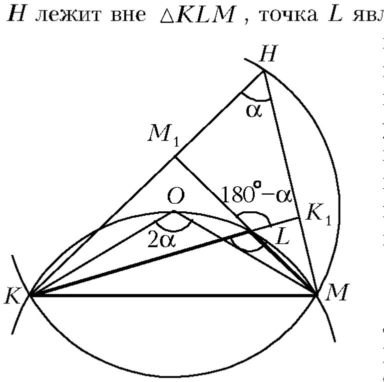


Рис. 4

Пусть $\angle KHM = \alpha$. Тогда центральный угол KOM равен 2α. Из точек O и L окружности KLM хорда KM видна под одним и тем же углом: $\angle KLM = \angle KOM = 2\alpha$. Но $\angle KLM = \angle K_1LM_1 = 180° - \alpha$, так как в четырехугольнике LK_1HM_1 углы при вершинах K_1 и M_1 прямые. Поэтому $2\alpha = 180° - \alpha$, т.е. $\alpha = 60°$, $\angle KLM = 180° - 60° = 120°$, и по теореме синусов искомый радиус равен

$$R_{KLM} = \frac{KM}{2\sin\angle KLM} = \frac{6}{2\sin 120°} = 2\sqrt{3}\ .$$

Упражнение 6. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину стороны AC.

Задача 3 (МГУ, биофак, 1990). *Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN = 1$, $MP = 6$, $MQ = 2$. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.*

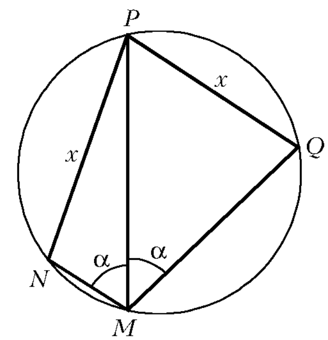


Рис. 5

Решение. Пусть R – искомый радиус, $\angle NMP = \angle QMP = \alpha$, $NP = x$ (рис. 5). Тогда $PQ = 2R\sin\alpha = x$ (в окружности против равных вписанных углов лежат равные хорды). Теорема косинусов для $\triangle MPN$ и $\triangle MPQ$ дает систему относительно x и $\cos\alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = 1^2 + 6^2 - 2\cdot 1\cdot 6\cdot\cos\alpha, \\ x^2 = 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \sqrt{34}, \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

а

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}\ .$$

Значит,

$$R = \frac{x}{2\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}\ .$$

Упражнение 7. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N. Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P. Найдите радиус окружности, если $AM = 1$, $AN = 2$, $AP = 4$.

Задача 4 (МГУ, физфак, 1971). *Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от вершины E до диагонали AD.*

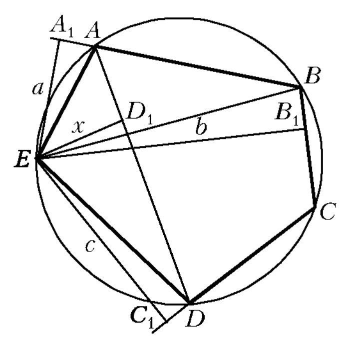


Рис. 6

Решение. Докажем следующее свойство точки E окружности (рис.6):

Если $A_1E = a$, $B_1E = b$, $C_1E = c$, $D_1E = x$ – соответственно, расстояния от точки E окружности до прямых AB, BC, CD, AD, образующих вписанный четырехугольник $ABCD$, то

$$ac = bx.$$

Доказательство вытекает из наличия двух пар подобных прямоугольных треугольников, имеющих общие гипотенузы, а значит, и одинаковые коэффициенты подобия. Действительно, вписанные углы ABE и ADE опираются на дугу AE и потому равны, значит, треугольники BA_1E и DD_1E подобны с коэффициентом $k = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{a}{x}$.

Далее, углы B_1BE и C_1DE равны, так как дополняют один и тот же угол CDE до 180° (по свойству вписанного четырехугольника $ABCD$), значит, треугольники BB_1E и DC_1E тоже подобны с тем же коэффициентом $k = \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{b}{c}$.

Окончательно имеем

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = bx .$$

Искомое расстояние равно $x = \dfrac{ac}{b}$.

Упражнение 8 (МГУ, физфак, 1971). В окружность вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). На дуге CD, не содержащей вершин A и B, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S на прямые CD, AB, AD и BC соответственно. Известно, что $SM = a$, $SN = b$, $SP = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и MPS.

Задача 5 (МГУ, геогр. ф-т, 1989). *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC.*

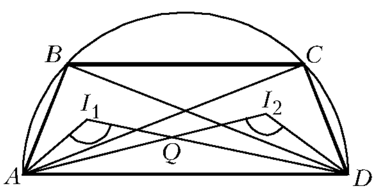


Рис. 7

Решение. Из точек B и C отрезок AD виден под одним и тем же (прямым) углом. Значит, четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность с диаметром $AD = 2$ (рис.7), причем

$$BC = 2R\sin\angle BAC \text{ , где } R = \frac{1}{2}AD = 1 .$$

Задача, следовательно, сводится к отысканию угла BAC.

Если из точки B окружности отрезок AD виден под углом φ, то из центра I_1 вписанной в $\triangle ABD$ окружности отрезок AD виден под углом $\dfrac{\pi+\varphi}{2}$ (см. задачу 1). Так как $\angle ABD = \angle ACD = \dfrac{\pi}{2}$, I_1 и I_2 – центры вписанных в $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ окружностей, то

$$\angle AI_1D = \angle AI_2D = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} .$$

Значит, четырехугольник AI_1I_2D тоже является вписанным в окружность. Ее радиус

$$R_1 = \frac{AD}{2\sin\angle AI_1D} = \frac{2}{2\sin\dfrac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} .$$

Так как $I_1I_2 = 2R_1\sin\angle I_1AI_2$, то

$$\sin\angle I_1AI_2 = \frac{I_1I_2}{2R_1} = \frac{1}{2} .$$

Аналогично,

$$\sin\angle I_1DI_2 = \frac{1}{2} .$$

Вписанные углы I_1AI_2 и I_1DI_2 – острые, так как каждый из подобных треугольников I_1QA и I_2QD (где $Q = AI_2 \cap DI_1$) уже имеет тупой угол. Значит,

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1DI_2 = \frac{\pi}{6} .$$

Докажем, что $\angle BAC = 2\angle I_1AI_2 = 2\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Действительно, угол BAC есть разность двух углов BAD и CAD ($\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$), а угол I_1AI_2 образован биссектрисами последних. Но тогда

$$\angle I_1AI_2 = \angle I_1AD - \angle I_2AD = \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC ,$$

откуда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}, \text{ а } BC = \sqrt{3} .$$

Упражнения

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle ACD = 60°$. Известно, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности и перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне CD, делит угол BAD пополам. Найдите длину диагонали AC.

10. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ проведены диагонали KM и LN. Известно, что $\angle KLM = \angle KMN = 60°$, $LM = \sqrt{3}$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника KLN и точкой пересечения биссектрис треугольника KMN равно 1. Найдите длину стороны KN.

11 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). Внутри треугольника ABC взята точка K. Известно, что длина стороны BC равна 1, длина стороны AB равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а величины углов ABC, AKB и CKB равны 30°, 120° и 120° соответственно. Найдите длину отрезка BK.

Задача 6 (МГУ, геогр. ф-т, 1986). *В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов ABC, BKA и BKC равны 120°, 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK.*

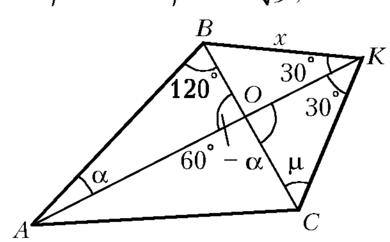


Рис. 8

Решение. Отрезок BK виден из точек A и C под углами $\angle BAK = \alpha$ и $\angle BCK = \mu$ соответственно (рис.8). Из треугольников AOB и KOC получаем

$$\angle AOB = \angle COK = 180° - \angle ABO - \angle BAK =$$

$$= 180° - 120° - \alpha = 60° - \alpha ,$$

$$\mu = 180° - \angle COK - \angle OKC =$$

$$= 180° - \left(60° - \alpha\right) - \left(60° - 30°\right) = 90° + \alpha .$$

Найдем радиусы описанных около $\triangle ABK$ и $\triangle CBK$ окружностей:

$$R_{ABK} = \frac{AB}{2\sin\angle AKB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 30°} = \sqrt{3} ,$$

$$R_{BCK} = \frac{BC}{2\sin\angle BKC} = \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и выразим через них искомую длину $BK = x$:

$$\begin{cases} x = 2R_{ABK}\sin\alpha \\ x = 2R_{BCK}\sin\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3}\sin\alpha \\ x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, и

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Значит,

$$x = 2\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Задача 7. *Биссектриса DE треугольника ADC продлена до пересечения с описанной окружностью в точке B. а) Известно, что $BD = l$ и $\angle ADC = \beta$. Найдите площадь четырехугольника ABCD. б) Известны длины отрезков $DE = m$ и $BE = n$, на которые отрезок BD рассекается другой диагональю AC. Найдите длины отрезков AB и BC.*

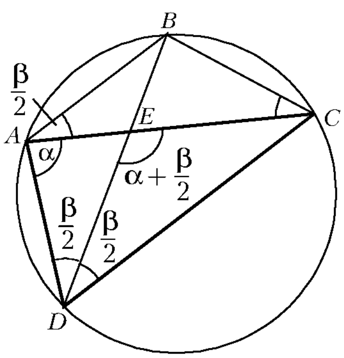


Рис. 9

Решение. а) Для искомой площади S имеем (рис.9)

$$S = \frac{1}{2}BD\cdot AC\cdot\sin\angle DEC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\cdot 2R\sin\angle ADC\cdot\sin\angle DEC.$$

Из $\triangle ADE$ и $\triangle ABE$ ясно, что

$$\angle DEC = \alpha + \frac{\beta}{2} = \angle DAB\text{, где } \alpha = \angle DAE,$$

$$\frac{\beta}{2} = \angle ADE = \angle CDE = \angle BAE = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}BD\left(2R\sin\angle DEC\right)\sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\left(2R\sin\angle DAB\right)\sin\angle ADC =$$

$$= \frac{1}{2}BD\cdot BD\cdot\sin\angle ADC = \frac{1}{2}l^2\sin\beta.$$

б) Ответ вытекает из подобия $\triangle ABE$ и $\triangle DBA$ (по двум углам):

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow AB^2 =$$

$$= BD\cdot BE \Rightarrow \mathrm{AB} =$$

$$= BC = \sqrt{(m+n)n}.$$

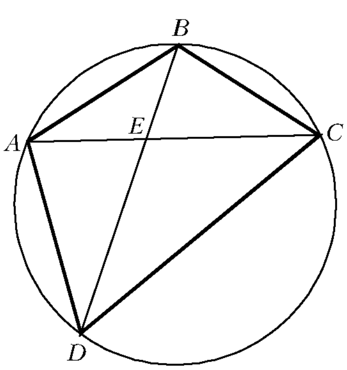


Рис. 10

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1997). *Диагонали вписанного в окружность четырехугольника ABCD пересекаются в точке E, причем $\angle ADB = \frac{\pi}{8}$, $BD = 6$ и $AD\cdot CE = DC\cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника ABCD.*

Решение. Конфигурация этой задачи (рис.10) напоминает предыдущую. Из условия имеем

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE}.$$

В треугольнике ADC отрезок DE рассекает противоположную сторону AC на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Значит, DE – биссектриса в $\triangle ADC$. Докажем это.

Пусть биссектриса DE_1 не совпадает с DE. Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE_1}{CE_1}\text{, или } \frac{AE_1}{CE_1} = \frac{AE}{CE},$$

но это значит, что точки E_1 и E совпадают.

Итак, BD – биссектриса. Осталось воспользоваться результатом предыдущей задачи. Так как по условию $BD = l = 6$, $\angle ADC = 2\angle ADB = 2\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, то искомая площадь равна

$$S = \frac{1}{2}BD^2\sin\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 9\sqrt{2}.$$

Задача 9 (МГУ, мехмат, 1997). *В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку C, параллельна BD. Известно, что $AB : BE = 3 : 1$ и $S_{\triangle ADC} = 18$. Найдите площадь треугольника CDE.*

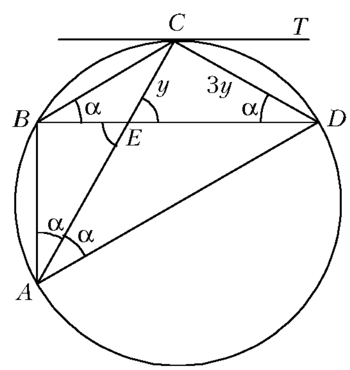


Рис. 11

Решение. Задача сводится к нахождению отношения $CE : AC$. Действительно, высота h_D, проведенная из вершины D, является общей для треугольников CDE и ADC (рис.11). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}CE\cdot h_D}{\frac{1}{2}AC\cdot h_D} = \frac{CE}{AC}.$$

Касательная CT параллельна BD. Поэтому $BC = DC$, $\overset{\cup}{BC} = \overset{\cup}{DC}$. Обозначим $\angle CBD = \angle CDB = \alpha$. По теореме о вписанном угле,

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{BC} = \angle BDC = \alpha,$$

$$\angle DAC = \frac{1}{2}\overset{\cup}{CD} = \angle CBD = \alpha,$$

т.е. хорда AC является биссектрисой угла BAD.

Имеем стандартную конфигурацию: биссектриса AE в $\triangle ABD$ продолжена до пересечения с описанной (около $\triangle ABD$) окружностью, т.е. во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла. Рассмотрим две пары подобных треугольников. Во-первых, $\triangle BAE \backsim \triangle CDE$ по двум углам: $\angle BAE = \angle CDE = \alpha$, $\angle BEA = \angle DEC$. Поэтому $BE : BA = CE : CD = 1 : 3$. Пусть $CE = y$, тогда $CD = 3y$. Кроме того, $\triangle CDE \backsim \triangle CAD$ по двум углам: $\angle CDE = \angle CAD = \alpha$, а угол при вершине C – общий.

Поэтому

$$\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{AC}\Rightarrow AC=\frac{CD^2}{CE}=\frac{(3y)^2}{y}=9y\ .$$

Значит,

$$\frac{CE}{AC}=\frac{y}{9y}=\frac{1}{9},$$

и искомая площадь равна

$$S_{\triangle CDE}=\frac{CE}{AC}\cdot S_{\triangle ADC}=\frac{1}{9}\cdot 18=2\ .$$

Упражнение 12. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку A, параллельна BD. Известно, что $CD:ED=3:2$, $S_{\triangle ABE}=8$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 10. *Биссектриса AA_1 треугольника ABC продлена до пересечения в точке A_2 с описанной окружностью (рис.12). а) Докажите, что*

$$\angle AA_1C=\angle ABA_2,$$

$$\angle AA_1B=\angle ACA_2\ .$$

б) Докажите, что $l_a^2=bc-mn$, где l_a – биссектриса угла A, $AC=b$, $AB=c$, $A_1C=m$, $A_1B=n$.

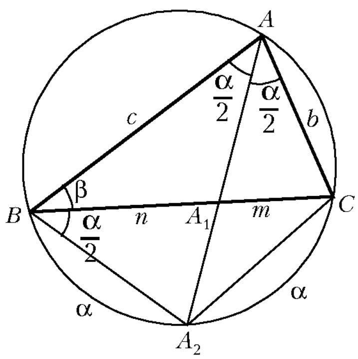


Рис. 12

Решение. а) В точке A_1 пересекаются хорды AA_2 и BC. С учетом теоремы о вписанном угле имеем две пары подобных треугольников (по двум углам) – это треугольники AA_1B и CA_1A_2, а также AA_1C и BA_1A_2. Каждое из указанных подобий дает известное свойство отрезков хорд: $AA_1\cdot A_1A_2=BA_1\cdot A_1C$, откуда

$$l_ax=mn,\qquad (*)$$

где $x=A_1A_2$. Поскольку

$$\angle BAA_2=\angle CAA_2=\angle CBA_2=\angle BCA_2=\frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha=\angle BAC$, получаем, что

$$\triangle AA_2B\sim\triangle ACA_1\sim\triangle BA_2A_1,$$

а также

$$\triangle AA_2C\sim\triangle ABA_1\sim\triangle CA_2A_1\ .$$

Из доказанных подобий следует, что, например,

$$\angle AA_1C=\angle ABA_2\ .$$

Иначе равенство этих же углов можно доказать непосредственно вычислением:

$$\angle AA_1C=\frac{\alpha}{2}+\beta-\text{ как внешний угол для }\triangle ABA_1,$$

$$\angle ABA_2=\frac{\alpha}{2}+\beta-\text{ как угол в }\triangle ABA_2\ .$$

Значит,

$$\angle AA_1C=\angle ABA_2\ .$$

Аналогичными способами можно доказать равенство

$$\angle AA_1B=\angle ACA_2\ .$$

б) Из подобия $\triangle AA_2B$ и $\triangle ACA_1$ имеем

$$\frac{AA_2}{AC}=\frac{AB}{AA_1}\Leftrightarrow\frac{l_a+x}{b}=\frac{c}{l_a}\Rightarrow l_a^2+l_ax=bc,$$

откуда, с учетом $(*)$, находим

$$l_a^2=bc-mn\ .$$

Мы получили важную формулу, позволяющую в некоторых случаях вычислять биссектрису угла треугольника.

Задача 11. *Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке E, AB = AD, CA – биссектриса угла C, $\angle BAD=140^\circ$, $\angle BEA=110^\circ$. Найдите угол CDB.*

Решение. Мы уже встречались со стандартным построением – продолжением биссектрисы треугольника до пересечения с описанной окружностью. В полученном при этом вписанном четырехугольнике (например, четырехугольнике $BCDA$) оказываются равными две вновь полученные стороны ($BA=DA$, так как по теореме о вписанном угле $\angle DBA=\angle BDA=\frac{1}{2}\angle BCD$).

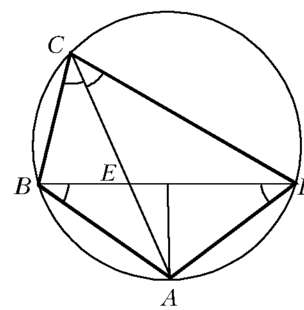


Рис. 13

В данной задаче ситуация обратная. Известно (рис.13), что отрезок CE – биссектриса угла C в $\triangle BCD$; биссектриса CE продолжена так, что в четырехугольнике $BCDA$ равны стороны BA и DA (по условию). Докажем, что четырехугольник $BCDA$ является вписанным. Достаточно убедиться, что описанная около $\triangle BCD$ окружность пройдет через точку A. Действительно, так как $BA=AD$, то $\angle DBA=\angle BDA$. Поэтому середина дуги BmD, как и точка A, лежит на биссектрисе угла BCD и на серединном перпендикуляре к хорде BD. Значит, точка A совпадает с серединой дуги BmD, и четырехугольник $BCDA$ является вписанным.

Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Поэтому

$$\angle BCD=180^\circ-140^\circ=40^\circ,$$

$$\angle ABD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot 40^\circ=20^\circ,$$

$$\angle CDB=\angle CAB=\angle EAB=$$

$$=180^\circ-(\angle ABD+\angle BEA)=180^\circ-\left(20^\circ+110^\circ\right)=50^\circ.$$

Упражнения

13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB=BC$, DB – биссектриса угла D, $\angle ABC=100^\circ$, $\angle BEA=70^\circ$. Найдите угол CAD.

14 (МГУ, геогр. ф-т, 1994). В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите высоту NA, биссектрису NB и медиану NC, если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R.

15. Найдите углы треугольника ABC, если его высота и медиана, проведенные из вершины C, делят угол ACB на 3 равные части.

XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

В этом году четвертый, окружной этап Всероссийской математической олимпиады проходил с 26 по 30 марта в шести городах: Владивостоке, Кемерове, Ижевске, Волгограде, Вологде, Долгопрудном, а пятый, заключительный этап олимпиады проводился с 21 по 29 апреля в Майкопе – столице Республики Адыгея. В заключительном этапе приняли участие 77 школьников, выступавших по программе 9 класса (из них три семиклассника и пятнадцать восьмиклассников!), 55 – по программе 10 класса и 67 – по программе 11 класса.

Отметим успешное выступление на олимпиаде семиклассника Саши Магазинова из Ярославля, получившего диплом II степени по девятому классу. Гостями олимпиады были школьники из Китая, представлявшие специализированную математическую Северо-Восточную Юйцай школу. Они выступили очень успешно, завоевав один диплом I степени, один – II степени и четыре – III степени.

По мнению участников, лучшими задачами олимпиады были задачи 6 для 9 класса, 8 для 10 класса и 4 для 11 класса. По результатам олимпиады была сформирована команда России для участия в XLIII Международной математической олимпиаде, которая в этом году состоится в Великобритании, в Глазго. В команду вошли Андрей Халявин (Киров), Михаил Дубашинский (Санкт-Петербург), Андрей Бадзян (Челябинск), Олег Гольберг (Ростов-на-Дону), Олег Стырт (Омск), Кирилл Сухов (Санкт-Петербург).

В заключение организаторы олимпиады выражают благодарность спонсору заключительного этапа – Исполкому СПС.

Задачи олимпиады

Окружной этап

8 класс

1. Можно ли все клетки таблицы 9×2002 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами?

О.Подлипский

2. Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два синих соседа по углу (или и то и другое).

Ю.Лифшиц

3. Имеется 11 пустых коробок. За один ход можно положить по одной монете в какие-то 10 из них. Играют двое, ходят по очереди. Побеждает тот, после хода которого впервые в одной из коробок окажется 21 монета. Кто выигрывает при правильной игре?

И.Рубанов

4. Дан треугольник ABC с попарно различными сторонами. На его сторонах построены внешним образом правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть правильным.

Ю.Лифшиц

5. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, либо прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

Н.Агаханов

6. Каждую сторону выпуклого четырехугольника продолжили в обе стороны и на всех восьми продолжениях отложили равные между собой отрезки. Оказалось, что получившиеся 8 точек – внешние концы построенных отрезков – различны и лежат на одной окружности. Докажите, что исходный четырехугольник – квадрат.

Н.Агаханов

7. По шоссе мимо наблюдателя проехали «Москвич», «Запорожец» и двигавшаяся им навстречу «Нива». Известно, что когда с наблюдателем поравнялся «Москвич», то он был равноудален от «Запорожца» и «Нивы», а когда с наблюдателем поравнялась «Нива», то она была равноудалена от «Москвича» и «Запорожца». Докажите, что «Запорожец» в момент проезда мимо наблюдателя был равноудален от «Нивы» и «Москвича». (Скорости автомашин считаем постоянными. В рассматриваемые моменты равноудаленные машины находились по разные стороны от наблюдателя.)

С.Токарев

8. Среди 18 деталей, выставленных в ряд, какие-то три подряд стоящие имеют массу по 99 г., а все остальные – по 100 г. Двумя взвешиваниями на весах со стрелкой определите все 99-граммовые детали.

С.Токарев

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

Н.Агаханов

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка O – центр описанной окружности. Точка M лежит на отрезке BO, точка M' симметрична M относительно середины AB. Точка K – точка пересечения $M'O$ и AB. Точка L на стороне BC такова, что $\angle CLO = \angle BLM$. Докажите, что точки O, K, B, L лежат на одной окружности.

С.Злобин

4. На плоскости расположены $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Докажите, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми. (Как обычно, $[x]$ означает целую часть числа x.)

В.Дольников

5. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 60 в таком порядке, чтобы сумма любых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма любых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, …, сумма любых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

И.Рубанов

6. Пусть A' – точка на одной из сторон трапеции $ABCD$ такая, что прямая AA' делит площадь трапеции пополам. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно середины средней линии трапеции $ABCD$.

Л.Емельянов

7. На отрезке [0; 2002] отмечены его концы и точка с координатой d, где d – взаимно простое с 1001 число. Разрешается отметить середину любого отрезка с концами в отмеченных точках, если ее координата целая. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке?

И.Богданов, О.Подлипский

8. См. задачу 8 для 8 класса.

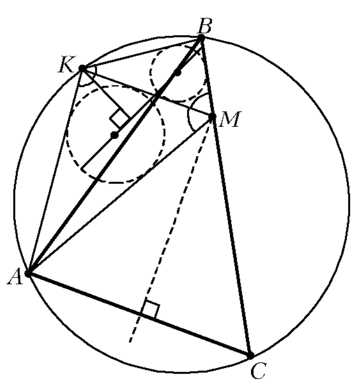
10 класс

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разностью 2, обладающей свойством: a_k^2+1 – простое при всех $k = 1, 2, \ldots, n$?

Н.Агаханов

2. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m+1$ точка с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

В.Дольников



3. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M (см. рисунок). Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

С.Берлов

4. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0=0$, $0 \le a_{n+1}-a_n \le 1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^3 \le \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2.$$

А.Храбров

5. На оси Оx произвольно расположены различные точки $X_1, \ldots, X_n$, $n \ge 3$. Построены все параболы, задаваемые приведенными квадратными трехчленами и пересекающие ось Оx в данных точках (и не пересекающие ось в других точках). Пусть $y=f_1, \ldots, y=f_m$ – функции, задающие эти параболы. Докажите, что парабола $y=f_1+\ldots+f_m$ пересекает ось Оx в двух точках.

Н.Агаханов

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. На отрезке [0; 2002] отмечены его концы и $n-1>0$ целых точек так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок [0; 2002], взаимно просты в совокупности. Разрешается разделить любой отрезок с концами в отмеченных точках на n равных частей и отметить точки деления, если они все целые. (Точку можно отметить второй раз, при этом она остается отмеченной). Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить целые точки на отрезке?

И.Богданов, О.Подлипский

8. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить все клетки доски размера 10×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились клетки не более чем пяти различных цветов?

Д.Храмцов

11 класс

1. Действительные числа x и y таковы, что для любых различных простых нечетных p и q число x^p+y^q рационально. Докажите, что x и y рациональны.

Н.Агаханов

2. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей ее основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

Н.Агаханов

3. Набор чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0=0$, $a_{n+1} \ge a_n+1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

А.Храбров

4. Клетчатая плоскость раскрашена в n^2 цветов так, что в любом квадрате из $n \times n$ клеток встречаются все цвета. Известно, что в какой-то строке встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов.

И.Богданов, Г.Челноков

5. Пусть $P(x)$ – многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x))=0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x)=0$.

И.Рубанов

6. На плоскости даны $n>1$ точек. Двое по очереди соединяют еще не соединенную пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода какого-то игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же ходить больше некуда, а нулевой суммы не было, то первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Н.Агаханов

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, и проведены биссектрисы l_A, l_B, l_C, l_D внешних углов этого четырехугольника. Прямые l_A и l_B пересекаются в точке K, прямые l_B и l_C – в точке L, прямые l_C и l_D – в точке M, прямые l_D и l_A – в точке N. Докажите, что если окружности, описанные около треугольников ABK и CDM, касаются внешним образом, то и окружности, описанные около треугольников BCL и DAN, касаются внешним образом.

Л.Емельянов

8. На отрезке $[0; N]$ отмечены его концы и еще 2 точки так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок $[0; N]$, целые и взаимно простые в совокупности. Если нашлись две отмеченные точки A и B такие, что расстояние между ними кратно 3, то можно разделить отрезок AB на 3 равные части, отметить одну из точек деления и стереть одну из точек A или B. Верно ли, что за несколько таких действий можно отметить любую наперед заданную целую точку отрезка $[0; N]$?

И.Богданов, О.Подлипский

Заключительный этап

9 класс

1. Можно ли в клетках таблицы 2002×2002 расставить натуральные числа от 1 до 2002^2 так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других?

Н.Агаханов

2. На одной стороне угла с вершиной O взята точка A, а на другой – точки B и C так, что B лежит между O и C. Проведена окружность с центром O_1, вписанная в треугольник OAB, и окружность с центром O_2, касающаяся стороны AC и продолжений сторон OA, OC треугольника OAC. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник ABC равнобедренный.

Л.Емельянов

3. На плоскости отмечены 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

Ю.Лифшиц

4. См. задачу М1836 «Задачника «Кванта».

5. На шахматной доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями – это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.)

Д.Кузнецов

6. Имеются одна красная и k ($k > 1$) синих ячеек, а также колода из $2n$ карт, занумерованных числами от 1 до $2n$. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. При каком наибольшем n можно такими операциями переложить всю колоду в одну из синих ячеек?

А.Белов

7. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

С.Берлов

8. Из промежутка $\left(2^{2n}; 2^{3n}\right)$ выбрано $2^{2n-1}+1$ нечетное число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, квадрат каждого из которых не делится на другое.

С.Берлов

10 класс

1. Многочлены P, Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству

$$P^2 + Q^2 = R^2 .$$

Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени действительные.

А.Голованов

2. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность w. Касательная к w, проведенная через A, пересекает продолжение стороны BC за точку B в точке K, а касательная к w, проведенная через B, пересекает продолжение стороны AD за точку A в точке M. Известно, что $AM = AD$ и $BK = BC$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

С.Берлов

3. См. задачу М1837 «Задачника «Кванта».

4. В некотором государстве было 2002 города, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.

А.Пастор

5. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac .$$

С.Злобин

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Пусть A' – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A. Аналогично строятся прямые b и c. Докажите, что a, b и c пересекаются в одной точке.

Л.Емельянов

8. См. задачу М1838 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. На плоскости отмечены несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т.е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

С.Берлов

3. Докажите. что для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ при $n > m$, где n, m – натуральные, справедливо неравенство

$$2\left|\sin^n x - \cos^n x\right| \leq 3\left|\sin^m x - \cos^m x\right| .$$

В.Сендеров

4. В городе несколько площадей. Некоторые пары площадей соединены улицами с односторонним движением так, что с каждой площади можно выехать ровно по двум улицам.

Докажите, что город можно разделить на 1014 районов так, чтобы улицами соединялись только площади из разных районов, и для любых двух районов все соединяющие их улицы были направлены одинаково (либо все из первого района во второй, либо наоборот).

А.Пастор

5. Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр.

С.Токарев

6. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник, O – точка пересечения диагоналей AC и BD. Пусть окружности, описанные около $\triangle ABO$ и $\triangle COD$, пересекаются в точке K. Точка L такова, что $\triangle BLC$ подобен $\triangle AKD$. Докажите, что если четырехугольник $BLCK$ выпуклый, то он является описанным.

С.Берлов

7. См. задачу М1838 «Задачника «Кванта».

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых числитель несократимой дроби, равной $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, не является степенью простого числа с натуральным показателем.

Ф.Петров

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Данилова Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Петухова Надежда – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»;

по 10 классам –

Травкин Роман – Липецк, школа 5,
Молчанов Евгений – Краснодар, школа 64;

по 11 классам –

Халявин Андрей – Киров, ФМЛ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Пермяков Дмитрий – Снежинск, школа 127,
Трущин Дмитрий – Саров, гимназия 2,
Лазарев Алексей – Киров, ФМЛ,
Родин Александр – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
Исаев Михаил – Барнаул, гимназия 42,
Березняк Тарас – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Плюхин Анатолий – Сущёво Костромской обл., Сущевская средняя школа,
Засорин Александр – Ростов-на-Дону, школа 92,
Кирьянов Александр – Краснодар, школа 88,
Мешин Юрий – Киров, ФМЛ,
Акулов Ярослав – Саров, лицей 3,
Тихонова Анна – Якутск, Республиканский колледж,
Тимофеев Алексей – Ижевск, ГЕЛ 41,
Магазинов Александр – Ярославль, школа 33, 7 кл.;

по 10 классам –

Щипцов Владислав – Луга, школа 3,
Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8,
Куликов Антон – Нижний Новгород, лицей 165,
Горин Вадим – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гравин Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Костин Андрей – Челябинск, ФМЛ 31,
Вальтман Виталий – Санкт-Петербург, АГ СПбГУ,
Ланин Константин – Иркутск, лицей 2,
Волков Юрий – Кемерово, городской классический лицей,
Ефремов Михаил – Ижевск, ЭМЛИ 29,
Вершинина Анастасия – Киров, ФМЛ,
Антипов Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Старолетов Алексей – Барнаул, гимназия 42,
Кузнецов Кирилл – Нижний Новгород, лицей 40,
Красильников Павел – Краснодар, школа 2,
Ломоносов Роман – Краснодар, школа 89,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей 33,
Сухарев Николай – Тобольск, гимназия 10;

по 11 классам –

Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Бадзян Андрей – Челябинск, ФМЛ 31, 9 кл.,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33,
Стырт Олег – Омск, лицей 64,
Сухов Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 10 кл.,
Жеребцов Николай – Калуга, школа 46,
Корсаков Артем – Копейск, школа 31,
Жданов Роман – Краснодар, лицей КубГТУ,
Калитка Владислав – Краснодар, школа 39,
Кудряшов Юрий – Рязань, СУНЦ МГУ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Шнурников Игорь – Краснодар, школа 36,
Трегубов Олег – Киров, ФМЛ, 8 кл.,
Чихачев Кирилл – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Кислицын Евгений – Киров, ФМЛ,
Мартынов Павел – Нижний Новгород, Педагогическая гимназия, 8 кл.,
Филимонов Владислав – Екатеринбург, школа 9,
Альминов Евгений – Киров, ФМЛ,
Покаташкин Павел – Снежинск, гимназия 127,
Котова Татьяна – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Никитин Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Герасимов Константин – Екатеринбург, гимназия 9,
Тихонов Иннокентий – Якутск, Республиканский колледж,
Козлов Павел – п.Шурскол Ярославской обл., гимназия г.Ростова, 8 кл.,
Лугинин Иван – с.Высокораменское Кировской обл., школа,
Мурашкин Михаил – Протвино, МОУ «Лицей»,
Разумовский Роман – Иваново, школа-лицей «Гармония», 8 кл.,
Торопов Евгений – Мурманск, МПЛ,
Калибин Борис – Иваново, школа-лицей «Гармония», 8 кл.,
Житницкий Дмитрий – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Кришеник Андрей – Черноголовка, школа 82,
Латушкин Сергей – Пермь, ФМШ 9, 8 кл.,
Куюмжиян Вергинэ – Ростов-на-Дону, гимназия 14, 8 кл.;

по 10 классам –

Кудинов Михаил – Колпашево, школа 7,
Швед Даниил – Челябинск, ФМЛ 31,
Бугаев Дмитрий – Омск, лицей 64,
Кушнир Сергей – Саров, гимназия 15,
Онскуль Илья – Омск, лицей 64,
Чернышев Егор – Нижний Новгород, лицей 165,
Лазеев Владимир – Тамбов, лицей 8,
Поршнев Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Петухов Алексей – Москва, лицей «Вторая школа»,
Антонова Татьяна – Тамбов, лицей 14,
Костин Михаил – Челябинск, ФМЛ 31,
Раскин Михаил – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа;

по 11 классам –

Вольфсон Георгий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кобзев Владимир – Башкортостан, Межгорье, БКШ,
Хозин Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,
Ватев Кирил – Долгопрудный, школа 5,
Гречников Евгений – Москва, школа 17,
Шкляев Александр – Пермь, ФМШ 146,
Пономарева Надежда – Екатеринбург, гимназия 9,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Стожков Владимир – Рыбинск, лицей 2,
Марков Виктор – Якутск, Республиканский колледж,
Коняев Андрей – Тамбов, лицей 14,
Шаталов Игорь – Краснодар, школа 87,
Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 10 кл.,
Авдеев Роман – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Данилов Александр – Ижевск, ЭМЛИ 29,
Левин Михаил – Ростов-на-Дону, гимназия 36,
Поярков Александр – Рыбинск, лицей 2,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Малинов Сергей – Йошкар-Ола, Политехнический лицей.

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

В апреле 2002 года в Волгограде прошел заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады школьников. В нем участвовали 66 девятиклассников, 68 десятиклассников и 61 одиннадцатиклассник.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Космический зонд

Космический зонд «Шумейкер» на некоторое время должен стать спутником астероида Эрос. По расчетам он будет обращаться вокруг астероида на высоте, составляющей $n = 1/15$ радиуса Эроса, с периодом $T = 4{,}5$ часа. Определите предполагаемую среднюю плотность астероида ρ. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

В.Белонучкин

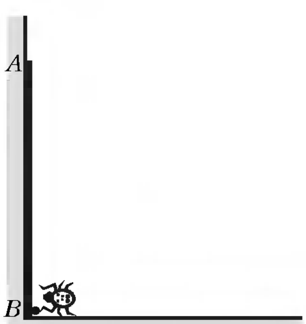


Рис. 1

Задача 2. Жук на палочке

У вертикальной стенки стоит палочка AB длиной L (рис.1). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью v, жук пополз по палочке с постоянной скоростью u относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?

С.Кузьмичев

Задача 3. Две проволоки

Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последовательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16 °С выше комнатной температуры, а вторая – в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное соединение заменить на последовательное? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.

В.Ефимов

Задача 4. Нелинейный элемент

Электрическая цепь (рис.2) состоит из резистора сопротивлением R и нелинейного элемента X, включенных последовательно. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) элементов R и X известны (рис.3). На участке $0 \le U \le U_0$ ВАХ обоих элементов совпадают. На вход цепи подается некоторое напряжение V.

1) Определите, какая доля η_1 количества теплоты, выделяющегося в цепи, приходится на нелинейный элемент в случаях $V \le 2U_0$ и $V = 4U_0$.

2) Включим последовательно в цепь еще один элемент X.

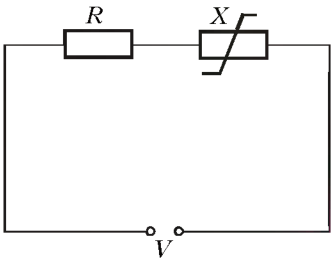


Рис. 2

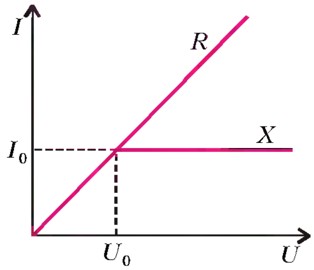


Рис. 3

Изобразите ВАХ двух последовательно включенных нелинейных элементов. Определите, какая доля η_2 количества теплоты, выделяющегося в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

3) А теперь подключим второй элемент X параллельно первому. Изобразите ВАХ двух параллельно включенных нелинейных элементов. Определите, какая доля η_3 количества теплоты, выделяющегося в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

А.Вахов, Л.Кулигин

10 класс

Задача 1. Мощный автомобиль

Автомобиль массой m = 1 т движется по горизонтальной дороге. Коэффициент трения покрышек об асфальт $\mu = 0{,}1$. Трения в осях нет. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля: $F_{\text{сопр}} = kv^2$, где $k = 0{,}2\ \text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$. Определите, как зависит максимальная скорость $v_{\max}$, которую может развить автомобиль, от мощности N установленного на нем двигателя. Нарисуйте график этой зависимости для $0 < N < 100$ кВт.

А.Чудновский

Задача 2. Кот Леопольд

Кот Леопольд сидел на самом краю крыши сарая. Два озорных мышонка решили выстрелить в него из рогатки, но кот заметил их и решил отстреливаться... Камни из рогаток мышат и кота вылетели одновременно и столкнулись в середине отрезка AB (рис.4). Найдите высоту H сарая и отношение пути, пройденного камнем кота Леопольда, к пути, пройденному камнем мышат, если известно, что $\varphi = 30^\circ$, скорость камня, вылетевшего из рогатки мышат, v_0 = 7 м/с, а кот выстрелил горизонтально.

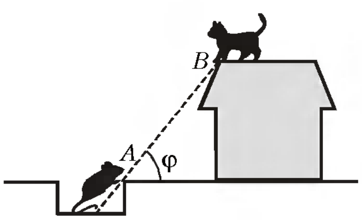


Рис. 4

В.Муравьев

Задач 3. Морозильник

Летом при температуре в помещении $t_1 = 27$ °C промышленный морозильник при работе на полную мощность поддерживал температуру в камере $t_2 = -23$ °C. Зимой температура в помещении упала до значения $t_3 = 7$ °C. Из-за отказа реле агрегат вновь заработал на полную мощность. Какой при этом стала температура t_x в камере? Считайте агрегат идеальной машиной.

В.Белонучкин

Задача 4. В полях

Частица массой m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряженностью $\vec{E}$, магнитное с индукцией $\vec{B}$ и поле тяжести $\vec{g}$ (рис.5). В некоторый момент поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{g}$ в момент выключения полей.

А.Шеронов

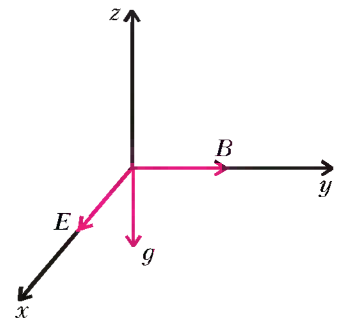


Рис. 5

Задача 5. Схема с диодом

В цепи (рис.6) батарейки и диод идеальные. Ключи разомкнуты, конденсаторы разряжены. Сначала замыкают ключ K_1. После завершения переходных процессов в цепи замыкают ключ K_2. Найдите количества теплоты Q_1 и Q_2, выделившиеся на резисторах R_1 и R_2 с момента замыкания ключа K_1. Известно, что $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}$, $C_1 = C_2 = C$.

Д.Подлесный

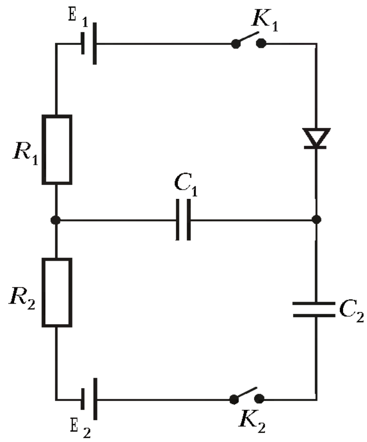


Рис. 6

11 класс

Задача 1. Бусинка

Гладкая проволока изогнута так, что если совместить ось Oy с одной ее частью, то другая часть проволоки будет совпадать с графиком функции $y = ax^3$ при $x > 0$ (рис.7). Проволока равномерно вращается вокруг вертикальной оси Oy с угловой скоростью ω. На нее надета бусинка M, которая может скользить вдоль проволоки с пренебрежимо малым трением. Найдите координаты x_0 и y_0 равновесного положения бусинки и период T малых колебаний относительно этого положения.

В.Муравьев

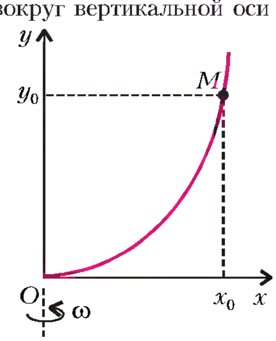


Рис. 7

Задача 2. Бензиновая горелка

С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3$ °C при температуре на улице $t_2 = -23$ °C. Предполагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0{,}4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу тепло с улицы в комнату. Какую температуру t_3 удастся в таком случае поддерживать в помещении при прежнем расходе бензина? Движок находится вне помещения.

В.Белонучкин

Задача 3. Коллекторный двигатель

Коллекторный двигатель питается от источника постоянного тока с напряжением U = 12 В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого электродвигателя, если магнитное поле в нем создается постоянными магнитами, а

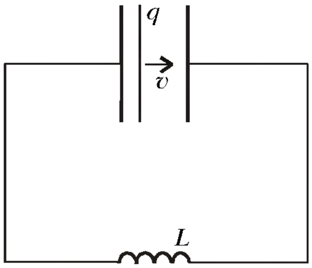


Рис. 8

момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и механической нагрузки?

В.Ефимов

Задача 4. Заряд на конденсаторе

С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q. Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис.8). Найдите зависимость тока в цепи от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора d, площадь поперечного сечения пластин S, индуктивность катушки L.

В.Можаев

Задача 5. Линза и крест

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис.9). Из текста следует, что предмет и изображение были одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось была параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).

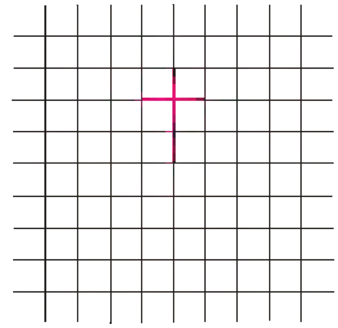


Рис. 9

А.Чудновский

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Моржаков Василий – Саратов, Лицей прикладных наук,
Зосимов Андрей – Дубна, лицей «Дубна»,
Мостовых Павел – Санкт-Петербург, школа 306;

по 10 классам –

Фортунатов Антон – Долгопрудный, школа 5,
Сунцов Евгений – Киров, ФМЛ,
Мохначевский Александр – Якутск, Республиканский колледж,
Григорьев Дмитрий – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Каменских Марина – Пермь, ФМШ 146;

по 11 классам –

Кожухов Станислав – Уфа, лицей 153 при УГАТУ,
Постоев Андрей – Ейск, школа 11,
Ражев Михаил – Дубна, лицей «Дубна»,
Михайлов Виктор – Саратов, ФТЛ 1,
Антышев Евгений – Москва, СУНЦ МГУ,
Кондратьев Андрей – Саратов, ФТЛ 1,
Касаткин Алексей – Уфа, лицей «Содружество»,
Квасов Игорь – Дзержинск, школа 2,
Путров Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гейко Василий – Нижний Новгород, лицей 87,
Николаев Сергей – Брянск, лицей 1,
Саидов Гаджи – Махачкала, лицей РМЛ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Шавлюгин Евгений – Владивосток, школа 23,
Желтов Алексей – Заречный Пензенской обл., лицей 230;

по 10 классам –

Родионов Павел – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Татаринов Айсен – Якутск, Республиканский колледж,
Аверьянов Петр – Санкт-Петербург, ФТШ;

по 11 классам –

Печенежский Иван – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Говорун Андрей – Псков, Псковский технический лицей,
Бекшанов Сергей – Королев, лицей 4,
Копылов Сергей – Тамбов, Тамбовский областной физико-математический лицей,
Панько Михаил – Сыктывкар, ФМЛ,
Самокотин Алексей – Челябинск, школа 31,
Коломоец Иван – Старый Оскол, школа 16,
Завьялов Андрей – Пермь, ФМШ 146,
Милютин Евгений – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Грубый Дмитрий – Фрязино, лицей,
Идрисов Георгий – Бийск, лицей.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Буряк Александр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Перчуков Юрий – Санкт-Петербург, ФТШ;

по 10 классам –

Лепешкин Сергей – Саратов, ФТЛ 1,
Циркин Степан – Омск, лицей «Бизнес и информационные технологии»;

по 11 классам –

Голубев Сергей – Астрахань, лицей 3,
Салицкий Игорь – Москва, СУНЦ МГУ,
Рафиков Раиль – Ноябрьск, школа 10,
Магадеев Евгений – Уфа, гимназия 93,
Гурьянов Дмитрий – Рязанская обл., школа-интернат 2,
Ковязин Александр – Киров, ФМЛ,
Дудченко Владимир – Санкт-Петербург, АГУ,
Олюнин Николай – Пермь, ФМШ 146,
Строкотов Дмитрий – Бийск, лицей,
Цицинский Андрей – Иркутск, лицей ИГУ,
Московцев Антон – Смоленск, Смоленский педагогический лицей-интернат,
Дружинин Андрей – Ноябрьск, школа 10,
Киданов Вадим – Бийск, лицей,
Миргородский Иван – Северодвинск, лицей 17.

Публикацию подготовили С.Козел, В. Слободянин

IX Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «КВАНТ» проводит очередную Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь – декабрь 2002 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном почтовом конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115446 Москва, а/я 450, Оргкомитет, «М-КВАНТ – номер класса».

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с написанным домашним адресом.

Заметим, что для успешного участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «КВАНТ». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2002/03 учебном году.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6–10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, и они заняли отрезок длиной l. На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек, и они заняли отрезок длиной L. Во сколько раз L больше l?

2. Вот очень простая

$$\text{Г} + \text{О} = \text{Л} - \text{О} = \text{В} \times \text{О} = \text{Л} - \text{О} = \text{М} - \text{К} = \text{А}\ .$$

Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным – разные.

3. В классе учатся менее 50 школьников. За контрольную работу $1/7$ учеников получили пятерки, $1/3$ – четверки, $1/2$ – тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

4. На лугу растет трава. Пустили на луг 9 коров – они опустошили луг за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней. Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

5. На клетке e1 шахматной доски находится белый конь, а на клетке d8 – черный конь. Первый ход белый конь может сделать либо на d3, либо на f3, а черный конь – только на e6. Второй ход белого коня может быть сделан на любую доступную для него клетку. Какова вероятность того, что белый конь окажется под боем черного коня?

Комментарий. Вероятность $P(A)$ события A – того, что белый конь в итоге окажется под боем черного коня, равна $P(A) = n_A/N$, где n_A – общее число возможных маршрутов белого коня за два хода, приводящих к событию A, а N – число всех возможных маршрутов белого коня за два хода.

7 класс

1. На противоположных берегах реки напротив друг друга растут две пальмы. Высота одной из них 10 м, другой 15 м, а расстояние между основаниями пальм 25 м. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую на поверхность реки между пальмами. Птицы бросились к рыбе и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы выплыла рыба?

2. Найдите наименьшие натуральные числа a, b ($b > 1$), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b\ .$$

3. Известно, что $n - 1$ делится на 15, а 1001 делится на $n + 1$. Найдите n.

4. Вася на вопрос, каков номер его квартиры, ответил так: «Если все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр номера, сложить, то половина полученной суммы составит как раз номер моей квартиры». В какой квартире живет Вася?

5. На клетке e1 шахматной доски находится белая шашка, а на клетке d8 – черная. Два игрока по очереди независимо друг от друга перемещают шашки на одну клетку вперед по диагонали налево или направо. Какова вероятность того, что после трех ходов шашки окажутся на соседних клетках?

Комментарии. 1) Если шашка имеет n возможных маршрутов движения, то вероятность любого их них равна $1/n$.

2) Вероятность попадания шашки на конкретную клетку, например на клетку d4 – $P(\text{d4})$, равна сумме вероятностей маршрутов, ведущих на эту клетку.

3) Вероятность комбинации типа «белая шашка на d4, черная на h5» равна $P(\text{d4}, \text{h5}) = P(\text{d4}) \cdot P(\text{h5})$.

4) Вероятность того, что шашки окажутся на соседних клетках, равна сумме вероятностей всех комбинаций, при которых это происходит.

8 класс

1. В равенстве

$$(р + о + м + а)^4 = \overline{рома}$$

определите число $\overline{рома}$.

2. Найдите, сколько вулканов насчитывается на планете, если в искомом числе десятков на 3 больше, чем сотен, а единиц на 4 меньше, чем десятков, причем полусумма всех цифр числа равна цифре десятков.

3. Сколькими разными способами из листа клетчатой бумаги $m \times n$ можно вырезать прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки?

4. Найдите все целые n, при которых модуль трехчлена $n^2 - 7n + 10$ является простым числом.

5. Два игральных кубика бросают два раза подряд. Какова вероятность $P(A)$ события A – того, что оба раза выпадет одна и та же сумма очков?

Комментарии. 1) Вероятность выпадения определенной суммы очков при бросании двух кубиков равна n/N, где n – число тех комбинаций очков на кубиках, которые дают эту сумму, а N – число всех возможных комбинаций очков на кубиках.

2) Вероятность комбинации типа «при первом бросании в сумме выпало 10, а при втором – 6 очков» равна

$$P(10,6) = P(10) \cdot P(6),$$

где $P(10)$ – вероятность выпадения 10 очков в первом броске, а $P(6)$ – вероятность выпадения 6 очков во втором броске.

3) Искомая вероятность $P(A)$ равна сумме вероятностей всех комбинаций, приводящих к событию A.

9 класс

1. Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер машины (четырехзначный) студенты не запомнили, но каждый из них приметил по одной его особенности:

1) две первые цифры числа были одинаковы;

2) две последние цифры совпадали;

3) число являлось точным квадратом.

Можно ли по этим данным узнать номер машины?

2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

3. Решите в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3.$$

4. Найдите сумму

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + \ldots + 999 \cdot 1001.$$

5. Решите уравнение

$$4x^2 - 4x - 3 = 4\left[\frac{2x-1}{2}\right].$$

(Здесь квадратные скобки означают целую часть числа.)

10 класс

1. Можно ли к числу 9999 приписать справа еще четыре цифры так, чтобы полученное восьмизначное число стало квадратом целого числа?

2. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие системе неравенств

$$x^2 < y, \; y^2 < z, \; z^2 < x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 + 10x_{10} = 55, \\ x_2 + 2x_3 + \ldots + 9x_{10} + 10x_1 = 55, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10} + 2x_1 + \ldots + 9x_8 + 10x_9 = 55. \end{cases}$$

4. Решите в целых числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y.$$

VI Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба «ГЛЮОН», проводимой с целью поиска, отбора и поддержки интеллектуально-одаренных детей, проявляющих интерес к фундаментальным наукам и информатике. Уникальность и новизна этого турнира состоят в том, что все задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере.

Для участия в турнире приглашаются команды школьников (5 человек), обладающих знанием физики и навыками работы на IBM PC. Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами в два тура – заочный и очный. Всем заявленным участникам рассылаются задания заочного тура, а по результатам выполнения этих заданий формируется состав участников очного тура соревнований.

Расскажем подробнее об очном туре VI Международного турнира «Компьютерная физика», проходившем с 27 января по 3 февраля 2002 года в городе Дубне.

Шесть команд из 45, принявших участие в заочном туре, были приглашены на финальную часть соревнований. Турнир прошел при участии Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ), Межрегиональной ассоциации «Женщины в науке и образовании» и при поддержке компаний «1С», «Физикон», «Кирилл и Мефодий», «Интел» (Московское представительство), а также Соросовской программы в области точных наук. Генеральным спонсором турнира выступила компания «Начало координат», предоставившая участникам компьютеры типа «Notebook» и замечательные призы.

Защита задания заочного тура («Комбинационное рассеяние») проходила в замечательном, современно оборудованном компьютерном зале Международного университета «Дубна». Каждой команде было предложено выступить с докладом и рассказать о результатах решения заочного задания. Остальные команды в этот момент исполняли роли оппонентов и рецензентов. Научная дискуссия докладчиков, оппонентов и рецензентов завершилась победой команды ФМЛ 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Перед началом соревнований очного тура участники прослушали лекцию профессора МГУ А.М.Попова об основах физики лазеров. Затем в течение 36 часов команды школьников, образовавшие временные научные коллективы, в острой конкурентной борьбе пытались найти научно-обоснованное решение задачи «Физика лазеров». На защите задания очного тура отличились команда Самарского аэрокосмического лицея (СМАЛ), которая стала победителем этого тура, а также команды ФМЛ 1511 при МИФИ и Многопрофильной гимназии 4 города Норильска, представившие наиболее глубокие результаты исследования работы лазерных систем.

Абсолютным победителем турнира стала команда ФМЛ 1511 при МИФИ, получившая переходной приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени награждены команды ФМЛ 1511 при МИФИ, СМАЛ и Многопрофильной гимназии 4 города Норильска. За высокие достижения жюри отметило дипломами II степени команды Самарской областной ФМШ и Классической гимназии 1 Ростова-на-Дону. Диплом III степени получила команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана. Участникам соревнований были также вручены многочисленные призы от спонсоров и организаторов турнира.

Международный интеллект-клуб «ГЛЮОН» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в следующем, VII Международном турнире «Компьютерная физика», который пройдет в феврале 2003 года в городе Пущино (Московская область).

Теперь – о содержательной части соревнований.

Очный тур. «Физика лазеров»

Лазеры – это уникальные источники оптического излучения, позволяющие получать предельно высокие интенсивности излучения, малые длительности и высокую степень когерентности. Принцип работы лазеров основан на явлении вынужденного излучения, предсказанного А.Эйнштейном в 1917 году и заключающегося в усилении пучка света при прохождении его через среду с инверсной заселенностью.

Под инверсной заселенностью среды понимается такая ситуация, когда число атомов в некотором состоянии с энергией E_2 оказывается больше, чем число атомов в нижележащем состоянии с энергией E_1 ($E_2 > E_1$). Часто для получения лазерной генерации используется так называемая четырехуровневая схема накачки (рис.1). Некоторый источник (лампа-вспышка, газовый разряд или т.п.) переводит

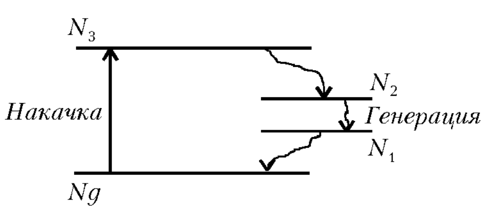


Рис.1. Четырехуровневая схема накачки лазера

атомы из основного состояния N_g в состояние N_3, откуда они быстро релаксируют в состояние N_2, являющееся верхним рабочим уровнем лазера. При этом оказывается, что населенность уровня N_2 больше, чем уровня N_1, т.е. на переходе между уровнями N_2 и N_1 возникает инверсия населенностей. На этом переходе и происходит генерация с частотой $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ где $\hbar$ – постоянная Планка. Рабочая среда лазера подбирается так, что переходы *3–2* и *1–0* происходят быстро (мгновенно). Тогда можно считать, что $N_3 \approx N_1 = 0$, а концентрация на уровне N_2 и определяет инверсию.

В рассматриваемом случае динамика лазерной генерации описывается следующими уравнениями:

$$N_g + N_2 = N_0 ,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = WN_g - \sigma_\text{ф} cqN_2 - \frac{N_2}{\tau} ,$$

$$\frac{dq}{dt} = \sigma_\text{ф} cN_2 q - \frac{q}{\tau_\text{ф}} ,$$

где q – это число фотонов в единице объема, $\tau_\text{ф}$ – время жизни фотона в системе, $\sigma_\text{ф}$ – сечение фотопоглощения, τ – время релаксации инверсии, W – скорость создания инверсии внешним источником, N_0 – полная концентрация рабочих атомов, c – скорость света.

Время жизни фотона в системе определяется выражением

$$\tau_\text{ф} = \frac{2L}{c(1-R)} ,$$

где L – расстояние между зеркалами оптического резонатора лазера, R – коэффициент отражения одного зеркала. Интенсивность излучения внутри резонатора связана с плотностью фотонов соотношением $I_\text{ф} = qc\hbar\omega$. Интенсивность выходного излучения равна $I = I_\text{ф}(1-R)$. Типичные значения параметров для широко распространенных лазеров (гелий-неонового и неодимового), работающих по четырехуровневой схеме в ближнем инфракрасном диапазоне, даны в таблице.

Генерация лазера может происходить в режиме модулированной добротности. Для этого в начальный момент времени одно из зеркал убирают, и в течение некоторого времени после накачки в среде создается высокий уровень инверсной заселенности. В момент, когда вводится зеркало, в системе возникает генерация, уровень которой определяется накопленной инверсией.

Таблица

Тип лазера	$\sigma_\text{ф}$, см^2	τ, с	N_0, см$^{-3}$
He : Ne, λ = 1,15 мкм	$5{,}5 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$3{,}5 \cdot 10^{15}$
Nd^{3+} : YAg, λ = 1,06 мкм	$8{,}8 \cdot 10^{-19}$	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{19}$

Задание

1) Исследуйте зависимости от времени величины инверсной заселенности N_2 и интенсивности излучения (плотности фотонов) в резонаторе неодимового лазера при условии мгновенного включения внешнего источника накачки ($W = \text{const}$ в диапазоне до 1 с$^{-1}$). Предположите, что $1 - R = 0{,}01$, $L = 2{,}5$ см. При каком коэффициенте R величина выходной мощности излучения будет максимальной?

2) Выполните пункт 1) для гелий-неонового лазера при L = 1 м, $1 - R = 0{,}01$.

3) Опишите параметры импульса генерации, возникающей в режиме модулированной добротности при введении зеркала в систему неодимового лазера.

Разбор задания

Система уравнений лазерной генерации имеет два стационарных, независящих от времени решения: первое при $q = 0$ и второе при $N_2 = 1/(c\sigma_\text{ф}\tau_\text{ф})$, которое определяет пороговое значение инверсной населенности. Для решения данной

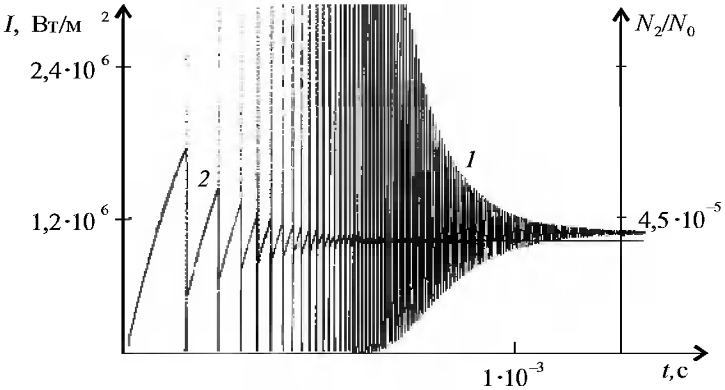


Рис.2. Временна́я зависимость интенсивности генерации и инверсной населенности(отношения населенностей N_2/N_0) при $W \approx 0,6$ с$^{-1}$ для неодимового лазера

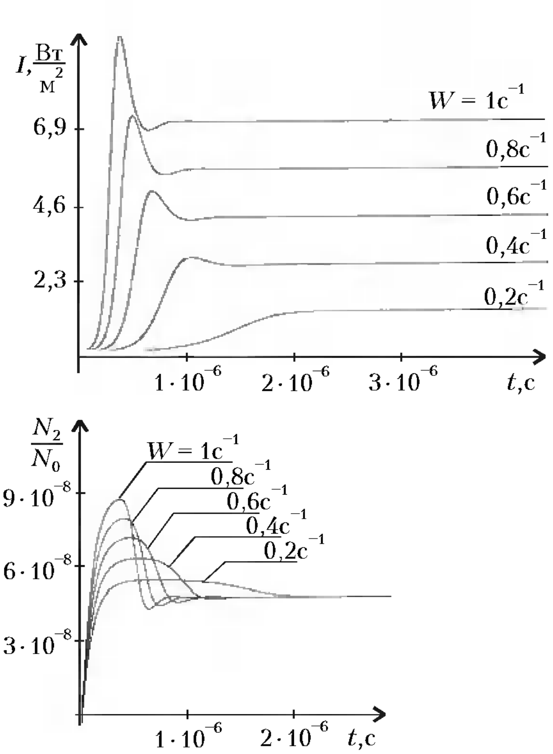


Рис.3. Временна́я зависимость интенсивности генерации и инверсной населенности при различных значениях скорости накачки для гелий-неонового лазера

задачи необходимо задать начальные условия. Обычно полагают, что $N_2 = 0$, а q – малое число, определяемое спонтанным фоном излучения, например q = 1 или q = 10. Для появления в системе генерации необходимо, чтобы накачка превышала пороговое значение W^*, соответствующее достижению в системе порогового значения инверсии. Характер генерации и выход на стационарный режим при превышении значения W^* существенным образом определяется соотношением времен τ и $\tau_ф$. В случае $\tau_ф \ll \tau$, что характерно для неодимового лазера, возникает пичковый режим генерации (рис.2). В противоположном случае (такая ситуация реализуется для гелий-неонового лазера) происходит плавное изменение во времени интенсивности генерации и инверсной населенности (рис.3). При заданных условиях пороги возникновения генерации составляют приблизительно $0,2$ с$^{-1}$ для неодимового лазера и $0,05$ с$^{-1}$ для гелий-неонового лазера.

В предположении отсутствия других каналов гибели фотонов, кроме выхода через зеркало, получается, что максимальная интенсивность излучения достигается при $R \to 1$. Поэтому в реальной системе оптимальное значение коэффициента отражения выходного зеркала определяется скоростью гибели фотонов внутри резонатора.

На рисунке 4 представлены динамика лазерной генерации в режиме модуляции добротности. Предполагалось, что сначала одно из выходных зеркал отсутствовало, а затем в систему вводилось второе зеркало, что приводило к резкому возрастанию времени жизни фотона в резонаторе и, следовательно, к резкому уменьшению значения инверсной населенности. В результате в системе формируется гигантский импульс, форма которого показана справа на рисунке 4.

Для демонстрации решения были использованы расчеты, представленные командой СМАЛ в составе Д.Игошина, А.Афанасьева, А.Белоусова, К.Гинзбургского, А.Горбанева.

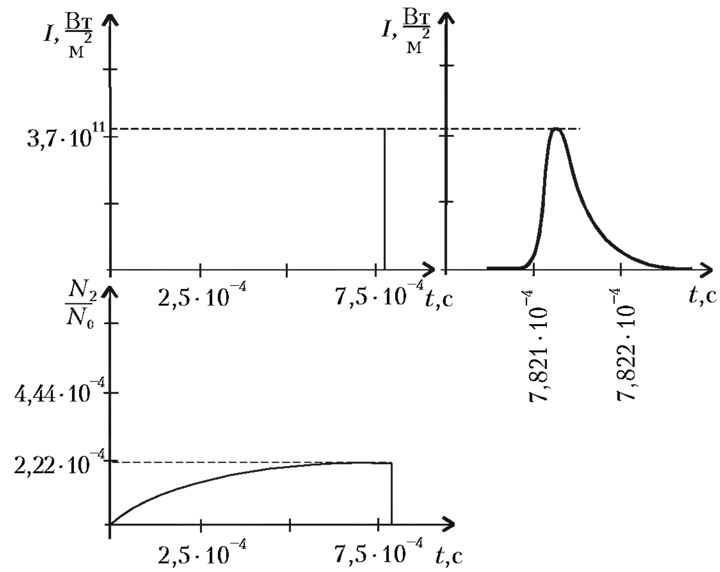


Рис.4. Временна́я зависимость интенсивности генерации и инверсной населенности при $W \approx 0,6$ с$^{-1}$ для неодимового лазера в режиме модулированной добротности. Вверху справа – форма импульса генерации

Публикацию подготовили
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Покажем, что число 99, которое мог задумать папа, удовлетворяет условию задачи. Если мама задумала число $\overline{xy}$, то $99\cdot\overline{xy} = (100-1)\overline{xy} = \overline{xy00} - \overline{xy}$. Сумма цифр этого числа равна

$$x + (y-1) + 9 - x + 10 - y = 18 .$$

Предположим, папа задумал другое натуральное число p, $p \neq 99$. Если при этом мама задумала число 1, то сумма цифр числа $p\cdot 1$ должна равняться 18, а этого быть не может. Итак, число 99 единственно возможное – именно его и записал папа.

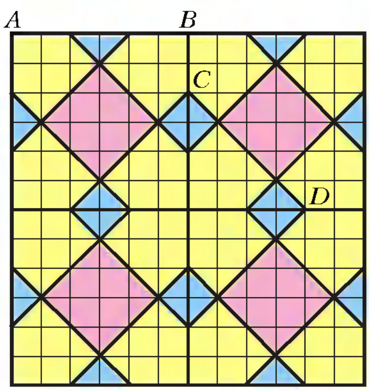


Рис. 1

2. Такие палочки найдутся. Предположим, каждые две палочки из двадцати различаются по длине более чем на 0,5 см. Тогда разница длин наибольшей и наименьшей палочек была бы не меньше чем $0{,}5\text{см}\times 19 = 9{,}5\text{см}$, что противоречит условию.

3. Отразив исходный квадрат со стороной AB симметрично относительно его сторон и одной из угловых вершин так, как показано на рисунке 1, замечаем, что квадрат со стороной AB и квадрат со стороной CD равносоставлены. Отсюда $AB = CD = 3$ см.

4. Обозначим числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Тогда

$$x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_{10}^5 = x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_{10}^5 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}) =$$
$$= \left(x_1^5 - x_1\right) + \left(x_2^5 - x_2\right) + \ldots + \left(x_{10}^5 - x_{10}\right).$$

В каждой скобке в последнем выражении стоят числа, оканчивающиеся нулем. Следовательно, сумма $x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_{10}^5$ делится на 10 и, значит, делится на 5.

5. Это 2002. Заметим, что сумма любых k последовательных натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$, …, $n+k-1$ равна $\dfrac{(2n+k-1)k}{2}$ и, следовательно, при нечетном k делится на k. Тогда из того, что искомое число представимо в виде суммы и 7, и 11, и 13 последовательных натуральных чисел, следует, что оно делится и на 7, и на 11, и на 13, а следовательно, и на $7\times 11\times 13 = 1001$. Наименьшее из таких чисел равно 1001, но оно представимо в виде суммы двух последовательных натуральных чисел: 1001 = 500 + 501. А вот следующее по величине число – 2002 – как раз невозможно представить в виде такой суммы (потому что среди двух последовательных натуральных чисел одно четное, второе нечетное, и сумма их также нечетна).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Нет, только ионы и нераспавшиеся молекулы.

2. Нет. Например, медный электрод при погружении в раствор медного купороса заряжается положительно.

3. В каждой единице объема электролита находится столько же положительных зарядов, сколько и отрицательных, так что в среднем электролит не заряжен.

4. Сила тока сначала будет расти, затем останется постоянной.

5. Безводная серная кислота не является проводником. В присутствии же проводящей разбавленной кислоты, из-за наличия в железе примесей, в растворе могут возникать местные токи, приводящие к коррозии сосуда.

6. Так как при электролизе через обе ванны пройдет одинаковый заряд, в первой ванне, где находятся одновалентные ионы меди, потребуется вдвое большее количество ионов для его переноса, чем во второй ванне, где валентность ионов меди равна двум. Следовательно, на катоде первой ванны выделится вдвое больше меди.

7. При угольных электродах электролиз будет идти, пока из раствора не уйдут все ионы меди; при медных – пока не растворится анод.

8. На месте выделенных в единицу времени на катоде положительных ионов и удаленных от него стольких же отрицательных ионов образуется такое же количество ионов обоих знаков из распавшихся молекул электролита (вследствие нарушения динамического равновесия). Положительные ионы также выделяются на аноде, в результате чего суммарный заряд, перешедший на катод за единицу времени, будет равен полному току.

9. Влага на руках всегда содержит соли, поэтому является электролитом с хорошей проводимостью и создает хороший контакт между проводами и телом. Вот почему за электрические провода опаснее браться мокрыми руками.

10. У выступов на поверхности металла напряженность электрического поля больше, чем у гладкой поверхности. При изменении направления тока, когда металл оказывается анодом, выступы растворяются быстрее и поверхность металла выравнивается.

11. Если аккумулятор разряжается, то разность потенциалов на его клеммах меньше ЭДС на величину падения напряжения на его внутреннем сопротивлении; если заряжается, то разность потенциалов на такую же величину больше ЭДС.

12. Внутреннее сопротивление старой батарейки велико. Вольтметр потребляет очень маленький ток, поэтому падение напряжения внутри батарейки при его подключении невелико. Но при подключении лампочки оно становится сравнимым с ЭДС, ток через нагрузку падает, и лампочка не загорается.

13. См. рис.2.

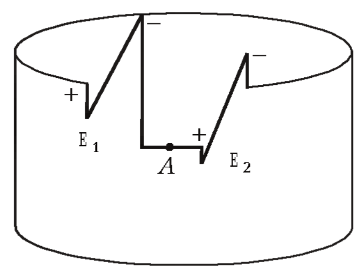


Рис. 2

14. Если внутеннее сопротивление второго аккумулятора велико, а ЭДС мала по сравнению с первым аккумулятором.

15. Если $\mathcal{E}_1$ значительно меньше $\mathcal{E}_2$, то ток, протекающий через первый элемент, направлен от B к A. При увеличении сопротивления R_1 ток на участке BR_1A уменьшается, что приводит к росту тока I на участке BRA.

16. При противоположном подключении на рельсах, из-за электролиза грунтовой влаги, выделялся бы кислород, что приводило бы к нежелательной коррозии.

17. Внутреннее сопротивление элемента невелико, а у электростатической машины оно достигает сотен миллионов ом.

Микроопыт

Действуйте по «методу Вольты» – коснувшись выводов языком, вы ощутите характерное пощипывание, будто от чего-то кислого.

Целая и дробная части числа

1. $[x] = -[x]$.

2. а) $\left(-1; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$; б) $\left[\frac{13}{3}; \frac{16}{3}\right]$.

3. Пусть $a = [a] + \alpha$, где $\alpha \neq 0$, а $x = 1 - \alpha$. Тогда $[x+a] = 1 + [a]$, $[x] + [a] = [1-\alpha] + [a] = [a]$, т.е. $[x+a] \neq [x] + [a]$.

4. См. рис.3. **5.** См. рис.4.

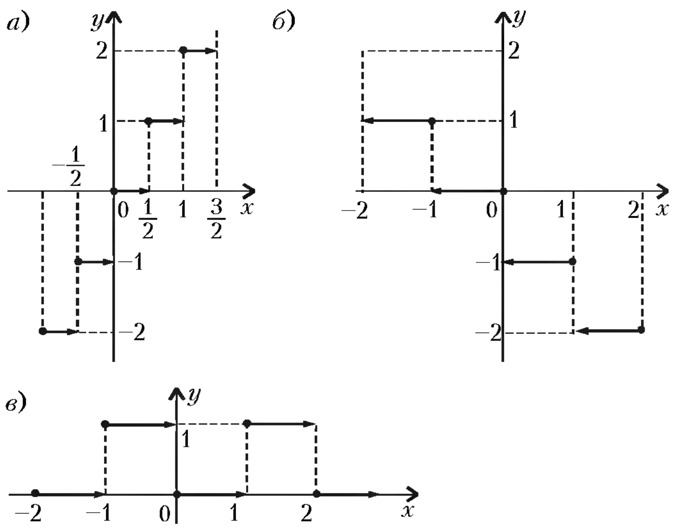


Рис. 3

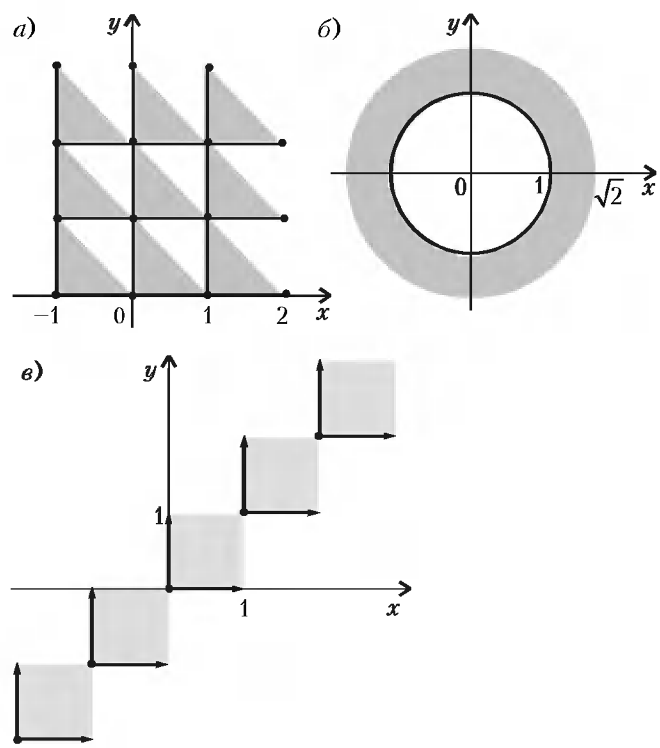


Рис. 4

6. Пусть $[x] = k$, $[y] = l$. Тогда $[x] + [y] + [x+y] = 2k + 2l + [\alpha + \beta]$, $[2x] + [2y] = 2k + 2l + [2\alpha] + [2\beta]$. Неравенство же $[\alpha+\beta] \le [2\alpha] + [2\beta]$ почти очевидно. Оно справедливо при $\alpha + \beta < 1$, а при $\alpha + \beta \ge 1$ хотя бы одно из чисел α или β не меньше $\frac{1}{2}$, так что $[\alpha+\beta] = 1 \le [2\alpha] + [2\beta]$.

7. См. рис.5.

9. Пусть $\alpha = \{x\}$. Тогда

$$\{k\{[x]+\alpha\}\} = \{k\alpha\} = \\ = \{k[x] + k\alpha\} = \{kx\}.$$

Уравнение имеет решение 0; $\frac{1}{2}$.

10. а) $\frac{2n+1}{6}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{n}{7}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 7k$.

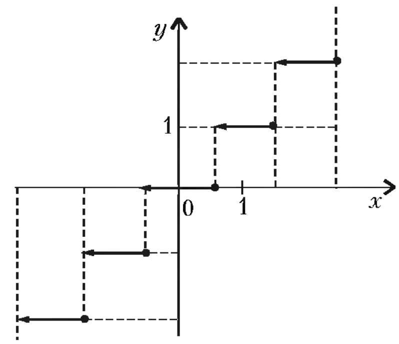


Рис. 5

11. а) Прямые вида $y - x = n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.
б) См. рис.3, *а*).

12. Все $n < 0$; $\left[n; \sqrt{n^2+1}\right)$ при $n \ge 0$, $n \in Z$.

13. $\frac{19}{4}$. Пусть $[x] = k$. Тогда $\{x\} \ge \frac{3}{k}$, но это значит, что $k \ge 4$. При $k = 4$ получаем наименьшее значение дробной части $\{x\} = \frac{3}{4}$.

14. а) *Указание.* Если $k \le \sqrt{[x]} < k+1$, то $k^2 \le [x] < (k+1)^2$, но тогда и $k^2 < [x] + \{x\} < (k+1)^2$, т.е. $k \le \sqrt{x} < k+1$.
б) a – целое число. Решение аналогично решению пункта *а*). Пусть $[\log_a [x]] = k$, тогда $k \le \log_a [x] < k+1$, $a^k \le [x] < a^{k+1}$. Если a – целое число, то тогда и $a^k < x < a^{k+1}$, т.е. $k < \log_a x < k+1$. Если же a – не целое число, то существует натуральное k, для которого $x = a^k$ – тоже не целое. Но тогда

$$\left[\log_a a^k\right] = [k] = k > \log_a\left[a^k\right] \ge \left[\log_a\left[a^k\right]\right].$$

15. *Указание.* Пусть $\left(5+\sqrt{26}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{26}$, где A_n и B_n – натуральные числа. Тогда $\left(5-\sqrt{26}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{26}$. Значит, $\left(5+\sqrt{26}\right)^n + \left(5-\sqrt{26}\right)^n = 2A_n$, $\left|\left(5-\sqrt{26}\right)^n\right| = \frac{1}{\left(5+\sqrt{26}\right)^n} < \frac{1}{10^n}$.

16. а) $n = 2$. При $n > 2$

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^m}\right] + \ldots < \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + \frac{n}{2^m} + \ldots = n.$$

б) Нет. в) Нет. Воспользуйтесь тем, что

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^m}\right] + \ldots < \\ < \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \ldots + \frac{n}{p^m} + \ldots = \frac{n}{p-1} < n - k$$

при достаточно больших n.

17. n. *Указание.* $(n+1)(n+2)\ldots(2n) = \frac{(2n)!}{n!}$.

18. Пусть p – простое число. Тогда

$$\left[\frac{n!}{p}\right] + \left[\frac{n!}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n!}{p^k}\right] + \ldots \ge (n-1)!\left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \ldots\right).$$

(Мы воспользовались неравенством $[kx] \ge k[x]$ при натуральном k.)

19. а) Поскольку $(2n)!! = 2^n \cdot n!$, показатель степени двойки, на которую делится $(2n)!!$, равен $n + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots$, а для $p > 1$ этот показатель равен показателю для числа $n!$.

б) 0 при $p = 2$, $\sum_k \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right]\right)$ при $p > 2$. *Указание.* Воспользуйтесь очевидным равенством $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

20. $\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x}{3}\right] - \left[\dfrac{x}{6}\right]$.

21. Пусть $[x] = m$, $\{x\} = \alpha$, причем $\dfrac{k}{n} \le \alpha < \dfrac{k+1}{n}$, где $0 \le k \le n-1$. Тогда

$$[nx] = [nm + n\{x\}] = mn + k.$$

В то же время

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-k-1}{n}\right] = (n-k)m,$$

$$\left[x + \frac{n-k}{n}\right] + \left[x + \frac{n-k+1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = km + k,$$

но это и значит, что

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Электростатическое поле в веществе

1. 1) $\Delta W = \dfrac{\varepsilon_0 (1-\varepsilon) S U^2}{2d} \approx -3{,}2 \cdot 10^{-5}$ Дж,

$A = -\Delta W \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ Дж;

2) $\Delta W = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon (\varepsilon - 1) S U^2}{2d} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Дж,

$A = \Delta W \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Дж.

2. $k = \dfrac{1}{\varepsilon + 1}$. **3.** $h = \dfrac{\varepsilon - n}{\varepsilon - 1} \dfrac{d}{n} \approx 0{,}2$ мм.

4. $E = \dfrac{\varepsilon \mathrm{E}}{\varepsilon (d-h) + h}$ при $h < \dfrac{d}{2}$, $E = \dfrac{\mathrm{E}}{\varepsilon (d-h) + h}$ при $h > \dfrac{d}{2}$.

Точка на окружности

5. $a|\mathrm{ctg}\,\alpha|/2$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $4\sqrt{770}/55$. **8.** ab/c^2.
9. 5. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** $2/\sqrt{7}$. **12.** 18. **13.** 30°.
14. $R\sqrt{2}/2;\ R\sqrt{2}/\sqrt{2+\sqrt{2}};\ R$. **15.** 30°, 60°, 90°.

XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Нельзя. *Указание.* Докажите, что найдутся строка и столбец, все числа в которых не меньше 2002.

2. *Указание.* Докажите, что

$$\angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle ABC, \text{ а } \angle AO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

3. Рассмотрим три синие точки A, B, C и не синюю D. Тогда $S_{ABC} \le S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}$.

Просуммируем это неравенство по всем таким четверкам. При этом каждый «синий» треугольник считается 12 раз, а каждый «сине-сине-несиний» – 4 раза. Таким образом, сумма площадей «синих» треугольников хотя бы в 3 раза меньше суммы площадей «сине-сине-несиних». Итого: сумма площадей «синих» треугольников составляет не более четверти суммы площадей треугольников, хотя бы две вершины которых синие. Аналогичное неравенство получим для двух других цветов. Так как рассмотренные группы не пересекаются, то и сумма площадей одноцветных треугольников составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников.

5. Рассмотрим семь пар ладей, стоящих в соседних столбцах. Разности их координат по вертикали лежат в отрезке [1, 7], поэтому либо две из них совпадают (и тогда расстояния в соответствующих парах тоже совпадают), либо среди них есть все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали и на 1 по горизонтали (пара A). Аналогично, либо найдутся две пары в соседних строках с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 1 по вертикали и на 2 по горизонтали (пара B). Тогда расстояния в парах A и B совпадают, а сами эти пары различны.

6. $n = k - 1$.

Построим пример, показывающий, что при большем n это невозможно. Пусть карты (сверху вниз) первоначально лежат так: сначала все нечетные (в произвольном порядке), потом четные, причем верхняя из них карта $2n$. Тогда первые k ходов однозначно определены – нечетные карты перекладываются на свободные позиции. Следующий ход, если $n > k$, невозможен, а если $n = k$, то можно лишь переложить карту $2n - 1$ обратно в изначальную стопку, что бессмысленно, ибо мы вернемся к предыдущей позиции. Поэтому эту стопку переложить нельзя.

Пусть $n < k$. Покажем, как можно организовать процесс перекладывания. Разобьем все карты на пары $(1, 2), \ldots, (2n-1, 2n)$, и сопоставим каждой паре по незанятой ячейке (хотя бы одна ячейка не сопоставлена никакой паре; назовем ее свободной). Теперь каждую карту сверху красной ячейки попытаемся положить в «ее» ячейку. Это может не получиться, только если эта карта имеет номер $2i$, а карта $2i - 1$ уже лежит в ячейке. Но тогда можно переместить карту $2i$ в свободную ячейку, сверху положить карту $2i - 1$, сопоставить этой ячейке нашу пару, а прежнюю сопоставленную назвать свободной. Таким образом, в результате мы получим карты, разложенные в ячейки по парам. Теперь, используя свободную ячейку, легко собрать их в колоду в правильном порядке.

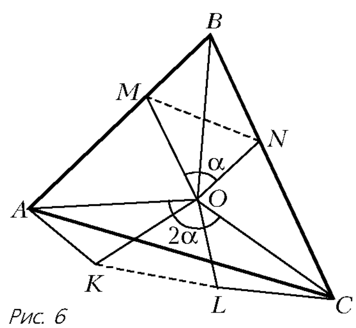


Рис. 6

7. Построим такие точки K и L, лежащие внутри угла AOC, что треугольники AKO и BMO, а также CLO и BNO соответственно равны (рис.6). Тогда $KO = OM$, $LO = ON$ и $\angle KOL = \angle AOC - \angle MOB - \angle BON = \angle MON$, поэтому треугольники KOL и MON равны, следовательно, $KL = MN$. Тогда периметр треугольника BMN равен $BM + MN + NB = AK + KL + LC \ge AC$.

8. Заметим, что среди выбранных чисел найдутся числа a и b, имеющие одинаковые остатки от деления на 2^{2n}. Докажем, что они – искомые.

Предположим, что a^2 делится на b. Тогда и $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ делится на b. Пусть $a = p \cdot 2^{2n} + r$, $b = q \cdot 2^{2n} + r$. Тогда $(p-q)^2 \cdot 2^{4n}$ делится на b, но поскольку b нечетное, то $(p-q)^2$ делится на b, откуда $|p-q| > 2^n$ и $\max(a,b) = \max(p,q) \cdot 2^{2n} + r > 2^{3n}$, что невозможно по условию.

10 класс

1. Из условия следует, что R и один из многочленов P и Q – третьей степени. Пусть, например, R и Q – третьей степени, P – второй. Поменяв, если это нужно, знаки многочленов на противоположные, можно считать, что коэффициенты при x^3 у R и Q положительны. Тогда из равенства

$$P^2 = R^2 - Q^2 = (R+Q)(R-Q),$$

где $R + Q$ – многочлен третьей степени, следует, что $R - Q$ –

первой степени, т.е. $R-Q=r(x-x_1)$, $r>0$ (коэффициент при x^4 у P^2 положителен).

Значит, P делится на $x-x_1$, поэтому и $R+Q$ делится на $x-x_1$, и так как $R-Q$ делится на $x-x_1$, то R и Q делятся на $x-x_1$, т.е. $R=(x-x_1)R_1$, $Q=(x-x_1)Q_1$, где R_1 и Q_1 – квадратичные функции с положительными коэффициентами при x^2. Пусть $P=a(x-x_1)(x-x_2)$. Из равенства

$$a^2(x-x_2)^2=(R_1+Q_1)(R_1-Q_1)$$

вытекает, что $R_1-Q_1=t=\text{const}>0$. Следовательно, $R_1=Q_1+t$, поэтому

$$a^2(x-x_2)^2=(2Q_1+t)t,$$

т.е. $Q_1=\dfrac{a^2}{2t}(x-x_2)^2-\dfrac{t}{2}$ – трехчлен, имеющий два действительных корня. Тогда Q имеет три действительных корня.

2. Поскольку $MB^2=AM\cdot DM=\frac{1}{2}MD^2$, а $KA^2=\frac{1}{2}KC^2$ (рис.7), по теореме синусов получаем, что

$$\frac{\sin\angle ACK}{\sin\angle CAK}=\frac{AK}{KC}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sin\angle BDM}{\sin\angle DMB}=\frac{BM}{MD}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но $\sin\angle ACK=\sin\angle BDM$. Следовательно, $\sin\angle CAK=\sin\angle DBM$.

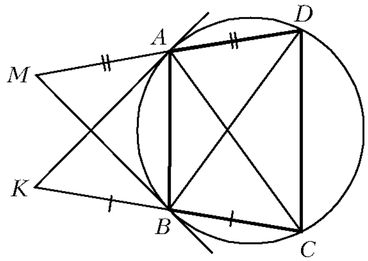


Рис. 7

Поэтому либо $\angle CAK=\angle DBM$, либо

$$\angle CAK+\angle DBM=180^\circ.$$

В первом случае треугольники CAK и BDM равны (они подобны по двум углам, а AB – их общая медиана к соответственным сторонам), так что $AD=BC$ и $AB\parallel CD$.

Во втором случае $\angle CAK=\angle CDA$, $\angle DBM=\angle DCB$, откуда $\angle CDA+\angle DCB=180^\circ$, но тогда $AD\parallel BC$.

4. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам, существовавшим в стране до начала всех преобразований. По условию, над этим графом несколько раз подряд проделывается следующая операция: удаляются все ребра некоторого простого цикла, а все вершины этого цикла соединяются с новой вершиной. Докажем, что в графе, получившемся после окончания всех преобразований, все вершины исходного графа будут иметь степень 1. Поскольку таких вершин как минимум 2002, это даст нам полное решение задачи.

Рассмотрим произвольную вершину v, принадлежащую исходному графу. По условию, при удалении этой вершины (и всех выходящих из нее ребер) из исходного графа образуется связный граф. Докажем, что это свойство сохраняется после применения к графу описанной в условии операции.

Рассмотрим произвольный граф G и вершину u этого графа, при удалении которой образуется связный граф. Пусть после применения к графу G описанной в условии операции образовался граф G'. Рассмотрим произвольный путь в графе G, не проходящий через u. В графе G' некоторые ребра этого пути могут быть удалены, но их концы должны быть соединены с новой вершиной (обозначим ее w). Таким образом, заменив минимальный участок пути, содержащий все удаленные ребра, на пару ребер, соединяющих концы этого участка с вершиной w, мы получим путь в графе G', имеющий те же концы и не проходящий через u. Это означает, что если мы удалим из графа G' вершину u, то для любых двух вершин получившегося графа мы можем найти соединяющий их путь. Для старых (отличных от w) вершин этот путь получается описанным выше способом из пути, соединяющего их в графе, образовавшемся при удалении u из графа G, а вершина w должна быть соединена ребром хотя бы с одной из старых вершин, которая соединена путями со всеми остальными вершинами данного графа. Таким образом, при удалении вершины u из графа G' также образуется связный граф.

Из доказанного следует, что после всех преобразований при удалении из получившегося графа вершины v образуется связный граф. Тогда, если степень вершины v в получившемся графе больше 1, то между двумя соединенными с v вершинами есть не проходящий через v путь. Этот путь вместе с вершиной v и двумя выходящими из нее ребрами образует в получившемся графе простой цикл, что по условию невозможно. Таким образом, степень вершины v в этом графе равна 1.

5. Поскольку

$$ab+bc+ca=\frac{9-a^2-b^2-c^2}{2},$$

нужно доказать, что

$$2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\ge 9.$$

Заметим, что $2\sqrt{a}+a^2\ge 3a$. Действительно,

$$2\sqrt{a}+a^2=\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}\,a^2}=3a.$$

Аналогично, $2\sqrt{b}+b^2\ge 3b$, $2\sqrt{c}+c^2\ge 3c$.

Осталось сложить полученные неравенства.

7. Пусть A_1, B_1 и C_1 – точки касания вписанной окружности с соответствующими сторонами $\triangle ABC$ (рис.8). Проведем через A_1 прямую a_1, параллельную биссектрисе угла A. Так как $\triangle AB_1C_1$ равнобедренный, то биссектриса угла A перпендикулярна B_1C_1,

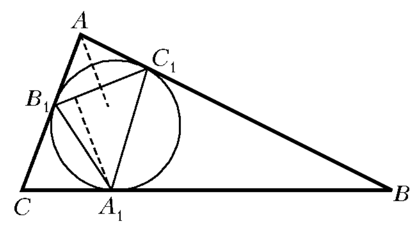


Рис. 8

поэтому проведенная через A_1 прямая, будучи перпендикулярной B_1C_1, является высотой $\triangle A_1B_1C_1$.

Пусть A_0, B_0 и C_0 (рис.9) – середины соответствующих сторон $\triangle ABC$. Так как $\triangle ABC$ и $\triangle A_0B_0C_0$ гомотетичны с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, то биссектрисы углов A и A_0 параллельны.

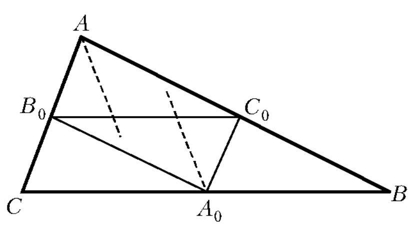


Рис. 9

Обозначим точку пересечения биссектрис $\triangle A_0B_0C_0$ через S.

Как известно, точки A_1 и A' равноудалены от середины своей стороны (то же верно для точек B_1 и B', C_1 и C').

Рассмотрим симметрию относительно точки S. При этой симметрии прямая a_1 перейдет в прямую a. Таким образом, при этой симметрии каждая из высот $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в одну из прямых a, b и c, следовательно, эти прямые пересекутся в точке, симметричной ортоцентру $\triangle A_1B_1C_1$ относительно центра S окружности, вписанной в серединный треугольник $A_0B_0C_0$.

11 класс

2. Поскольку в случае, когда все точки лежат на одной прямой, утверждение задачи очевидно, можно считать, что в нашем множестве найдутся точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Докажем, что $\operatorname{tg}\angle BAC$ либо рациональное число, либо не существует. Рассмотрим координаты этих точек в системе, соответствующей тройке A, B, C. Если $x_A = x_B$ (случай $x_A = x_C$ аналогичен), то $\operatorname{tg} \angle BAC = \pm\dfrac{x_C - x_A}{y_B - y_A}$ рационален (или не существует). Если же $x_B \neq x_A$ и $x_C \neq x_A$, то числа $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ и $q = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ рациональны. Но $p = \operatorname{tg}\alpha$, $q = \operatorname{tg}\beta$, где α и β – углы, образуемые лучами AB и AC с положительным направлением оси Ox, поэтому из формулы

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{p-q}{1+pq}$$

следует рациональность $\operatorname{tg} \angle BAC$ (или тангенс не существует, если $pq = -1$). Аналогично, рациональными являются тангенсы углов всех треугольников с вершинами в данных точках. Рассмотрим систему координат с началом A и единичным вектором по оси Ax, равным $\overrightarrow{AB}$. Для любой точки D нашего множества $\operatorname{tg} \angle DAB$ и $\operatorname{tg} \angle DBA$ рациональны, поэтому уравнения прямых AD и BD имеют рациональные коэффициенты. Тогда и точка D имеет рациональные координаты. Изменив масштаб, мы получим целочисленные координаты у всех точек.

3. *Указание.* Достаточно доказать это неравенство при $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ (при $x = \dfrac{\pi}{4}$ оно очевидно, а при $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ получается заменой $y = \dfrac{\pi}{2} - x$). Для таких x докажите неравенства

$$\cos^k x - \sin^k x \geq \cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x \quad \text{при} \quad k \geq 2$$

и

$$\frac{\cos^n x - \sin^n x}{\cos^k x - \sin^k x} \leq \frac{\cos^{n-1} x - \sin^{n-1} x}{\cos^{k-1} x - \sin^{k-1} x} \quad \text{при} \quad n \geq k > 1.$$

Убедитесь, что исходное неравенство сводится к случаям $m = 1$, $n = 3$ и $m = 1$, $n = 2$, для которых оно почти очевидно.

4. Сначала докажем, что если с любой площади выходит не более двух улиц, то площади можно покрасить в 13 цветов так, чтобы ни с какой площади нельзя было попасть на площадь того же цвета, проехав менее трех улиц. Для этого рассмотрим следующий вспомогательный ориентированный граф: его вершинами будут площади, а ориентированными ребрами будут соединены пары площадей, между которыми в нашем городе есть путь, проходящий не более чем по двум улицам. Легко видеть, что в этом графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер. Нужно доказать, что вершины этого графа можно раскрасить в 13 цветов правильным образом. Это утверждение легко доказывается индукцией по числу вершин. Действительно, в случае, если вершин не больше 13, утверждение очевидно. Далее, легко видеть, что если в ориентированном графе из каждой вершины выходит не более 6 ребер, то существует вершина, в которую входит не более 6 ребер. Удалив из графа эту вершину, мы получим граф, удовлетворяющий нашему условию и содержащий меньшее число вершин. По индукционному предположению, мы можем раскрасить вершины этого графа в 13 цветов, после чего удаленную вершину мы также можем покрасить в один из цветов, так как она соединена не более чем с 12 вершинами.
Теперь для каждого цвета разделим все площади данного цвета на 78 типов, в зависимости от того, на площади каких цветов ведут улицы, выходящие с данной площади. Поскольку других цветов 12, для каждого цвета есть 12 вариантов, в которых обе улицы ведут на площади одного цвета, и $\dfrac{12\cdot 11}{2} = 66$ вариантов, в которых они ведут на площади разных цветов. Итого, 78 вариантов. Таким образом, мы можем разбить все площади на $78\cdot 13 = 1014$ районов.
Осталось доказать, что полученное разбиение подходит.

5. 10010.
Пусть для натурального числа n имеют место указанные представления: $n = a_1 + \ldots + a_{2002} = b_1 + \ldots + b_{2003}$.
Воспользуемся тем, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{2002}$ дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма цифр; обозначим этот остаток через r ($0 \leq r \leq 8$), а соответствующий остаток для чисел $b_1, \ldots, b_{2003}$ – через s ($0 \leq s \leq 8$).
Тогда $n - 2002r$ и $n - 2003s$ кратны 9, а значит, и число

$$(n - 2002r) - (n - 2003s) = 2003s - 2002r = 2003(r+s) - 4005r$$

кратно 9. Число $4005r$ также кратно 9, а число 2003 взаимно просто с 9; отсюда следует, что число $r + s$ кратно 9.
Если при этом $r = s = 0$, то $n \geq 9\cdot 2003$ (поскольку $b_1, \ldots, b_{2003}$ делятся на 9). Если же $r \neq 0$, то $r + s = 9$, и потому имеет место по крайней мере одно из неравенств $r \geq 5$ или $s \geq 5$; для числа n получаются неравенства $n \geq 5\cdot 2002$ и $n \geq 5\cdot 2003$ соответственно. А так как $10010 = 5\cdot 2002 = 4\cdot 2002 + 2002\cdot 1$ и числа 4 и 2002 имеют одинаковую сумму цифр, то число 10010 – искомое.

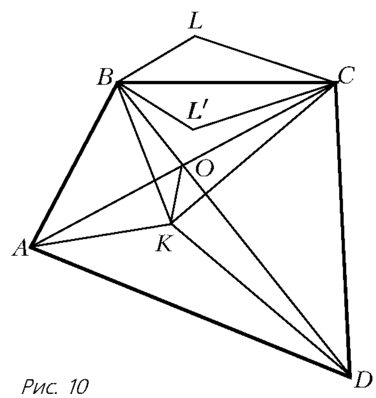


Рис. 10

6. Будем считать, что K лежит в $\triangle AOD$ (все остальные случаи разбираются аналогично). Пусть L' – точка, симметричная L относительно BC (рис.10). Тогда

$$\angle L'BO = \angle OBC - \angle L'BC = \angle OBC - \angle LBC,$$

но $\angle OBC = \angle OAD$, так как $ABCD$ вписанный, следовательно,

$$\angle L'BO = \angle OAD - \angle KAD = \angle OAK = \angle OBK,$$

так как $ABOK$ вписанный. Аналогично, $\angle L'CO = \angle OCK$.
Далее, $\angle BKO = \angle BAO = \angle CDO = \angle CKO$, так как четырехугольники $ABCD$, $ABOK$ и $CDKO$ вписанные.
Теперь рассмотрим четырехугольник $BL'CK$ (рис.11). Пусть N – точка пересечения CK и BL', M – точка пересечения

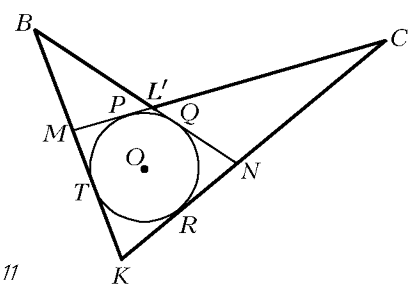


Рис. 11

BK и CL'. Так как CO – биссектриса $\angle MCK$, BO – биссектриса $\angle NBK$, а KO – биссектриса $\angle MKN$, то O равноудалена от сторон четырехугольника $ML'NK$ и является центром вписанной в него окружности. Пусть P, Q, R, T – точки касания этой окружности со сторонами ML', $L'N$, NK и KM соответственно. Тогда

$$CK + BL' = (CR + KR) + (BQ - L'Q) = CP + KT + BT - L'P =$$
$$= (KT + BT) + (CP - L'P) = KB + CL'.$$

Значит, $CK + BL = KB + CL$, и четырехугольник $BLCK$ является описанным, что и требовалось доказать.

8. Положим $S(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{A(n)}{B(n)}$, где $A(n)$ и $B(n)$ взаимно просты. Нам понадобится оценка $B(n)>n/2$.
Предположим, что при всех $n\ge n_0$ число $A(n)$ является степенью простого. Пусть $p>n_0+5$ – простое число. Тогда $A(p-1)$ делится на p (слагаемые суммы $S(p-1)$ разбиваются на пары, для каждой из которых числитель суммы делится на p). Следовательно, $A(p-1)=p^k$, $k\in\mathbf{N}$.
Далее, докажем, что числитель $A\left(p^n-1\right)$ также кратен p (и, стало быть, является степенью p) при всех натуральных n. Проведем индукцию по n. База доказана. Переход $n-1\to n$. Имеем $S\left(p^n-1\right)=S\left(p^{n-1}-1\right)/p+S'$, где $S'=\sum_{d\le p^n-1,d\not\vdots p}\frac{1}{d}$ (первое слагаемое как раз равно сумме слагаемых со знаменателями, делящимися на p). Сумма S' разбивается на несколько (а именно, p^{n-1}) сумм вида

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{pk+i},\quad k=0,1,\ldots,p^{n-1}-1.$$

Каждая из них имеет числитель, делящийся на p, что устанавливается так же, как и для $S(p-1)$. Осталось убедиться, что числитель дроби $S\left(p^{n-1}-1\right)/p$ делится на p. Действительно, $A\left(p^{n-1}-1\right)=p^s$ в силу индукционного предположения, причем $s>1$ (вспомним, что $B\left(p^{n-1}-1\right)\ge p^{n-1}/2\ge p/2$, а $S\left(p^{n-1}-1\right)\ge S(n_0+4)\ge S(4)>2$). Положим

$$H_p(n)=S\left(p^n-p\right)-S\left(p^n-1\right)=\sum_{i=1}^{p-1}1/\left(-p^n+i\right).$$

Если $n>k$, то числитель дроби $H_p(n)$ делится на p^k, но не на p^{k+1} (ибо $H_p(n)-S(p-1)$ – дробь, числитель которой делится на p^n). Отсюда получаем, что оба числителя $A\left(p^n-1\right)$ и $A\left(p^n-p\right)$ делятся на p, но один из них не делится на p^{k+1}. Значит, одна из дробей $S\left(p^n-1\right)$ и $S\left(p^n-p\right)$ не превосходит $\frac{2p^k}{\left(p^n-p\right)}<1$ при $n=k+2$ – противоречие.

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $\rho=\frac{3\pi(1+n)^3}{GT^2}\approx 653$ кг/м^3.
2. Решение этой задачи (а также некоторых других задач) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

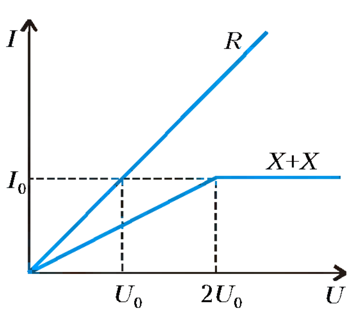


Рис. 12

4. 1) При $V\le 2U_0$ $\eta_1=0{,}5$; при $V=4U_0$ $\eta_1=0{,}75$.
2) ВАХ получается сложением напряжений для каждого фиксированного значения силы тока (см. рис.12); $\eta_2=0{,}75$.
3) ВАХ получается сложением сил токов для каждого фиксированного значения напряжения (см. рис.13); $\eta_3=0{,}5$.

10 класс

1. Есть предельная скорость v_0, не зависящая от мощности. При этой скорости $F_{\text{сопр}}=F_{\text{тр max}}$, откуда $v_0=\sqrt{\mu mg/k}\approx 71$ м/с. С другой стороны, для поддержания постоянной скорости требуется мощность $N=F_{\text{сопр}}v=kv^3$, откуда получаем

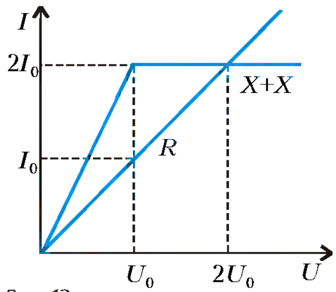


Рис. 13

$v_{\max}(N)=(N/K)^{1/3}$. Скорость перестает расти начиная с мощности $N_0=\mu mg\sqrt{\mu mg/k}\approx 70$ кВт.
2. $H\approx 2{,}8$ м; пройденные пути совпадают.
3. Искомую температуру найдем из квадратного уравнения $\frac{(T_1-T_2)^2}{(T_3-T_x)^2}=\frac{T_2}{T_x}$, откуда $T_{x1}=232$ К, т.е. $t_{x1}=-41$ °С, а второй корень $T_{x2}=338$ К не подходит – он отвечает работе агрегата в качестве теплового насоса.
5. $Q_1=C\mathcal{E}^2/2$, $Q_2=C\mathcal{E}^2/4$.

11 класс

1. $x_0=\frac{\omega^2}{3ag}$, $y_0=\frac{\omega^6}{27a^2g^3}$; $T=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1+\frac{\omega^8}{9a^2g^4}}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Л.В.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №